习3-3：上段重$F_1=8kN$，下段重$F_2=37kN$，$F_3=6kN$，求力系向柱底中心简化的结果。

解：取坐标如图示

$$R_x = -6kN$$

$$R_y = -45kN$$

主矢：

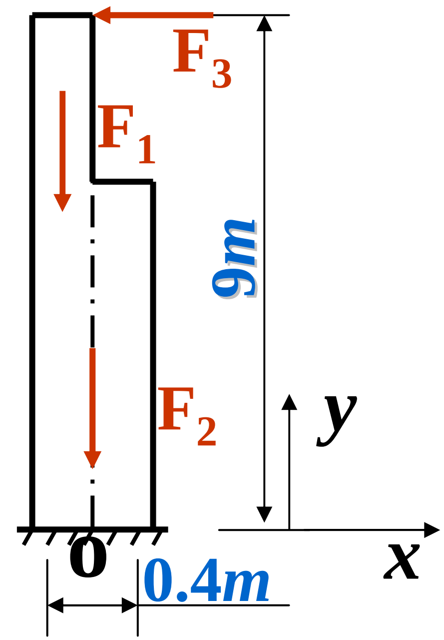
$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

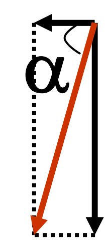
$$= \sqrt{(-6)^2 + (-45)^2} \approx 45.4kN$$

$$\alpha = arctan\ |45/6| \approx 82.4^o$$

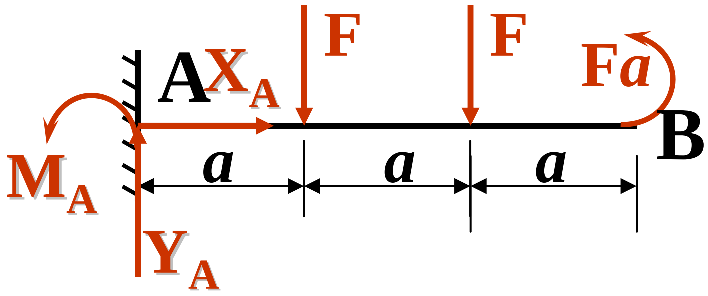
主矩：

$$M_o = 0.1 \times 8 + 9 \times 6 = 54.8kN \cdot m$$





题3－7(b)解：



梁受力如图示；

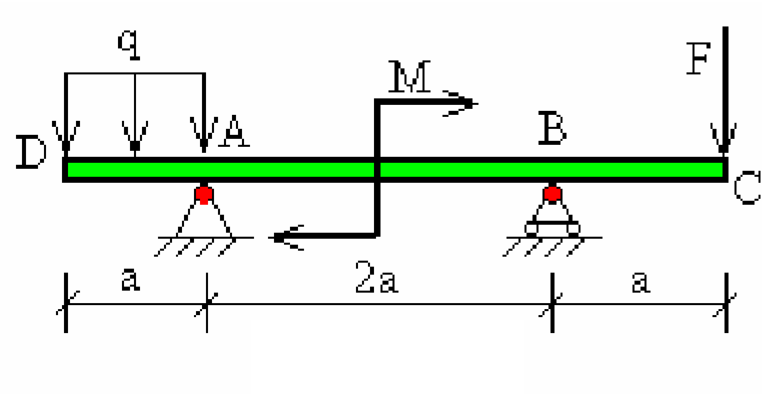
$$\sum X = 0: X_A = 0$$

$$\sum Y = 0: Y_A = 2F$$

$$\sum m_A = 0: M_A = aF + 2aF - aF$$

$$M_A = 2aF$$

题3－8(b)解：



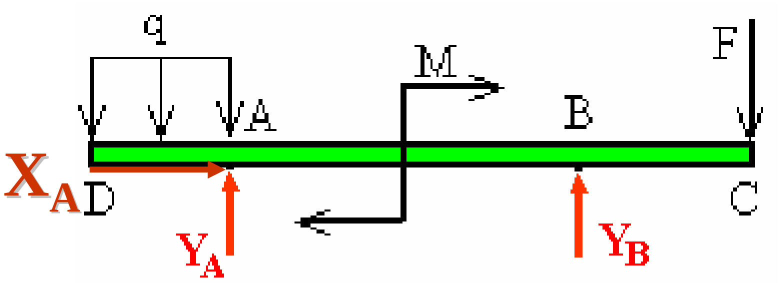
研究刚架：

受力如图示；

$$\sum X=0: X_A=0$$

$$\sum M_A=0: qa^2/2-M+2aY_B-3aF=0$$

$$\sum Y=0: Y_A+Y_B-F-qa=0$$

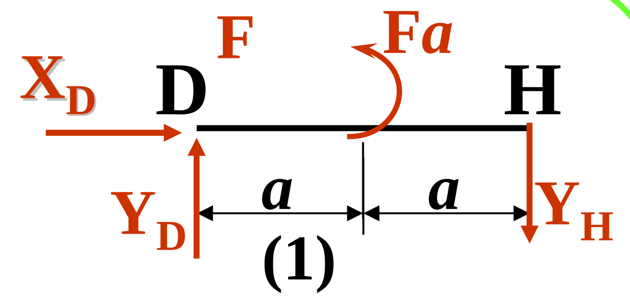


解方程，得：

$$Y_A=\frac{1}{2}\left(\frac{5}{2}qa-F-\frac{M}{a}\right),$$

$$Y_B=\frac{1}{2}\left(3F+\frac{M}{a}-\frac{1}{2}qa\right).$$

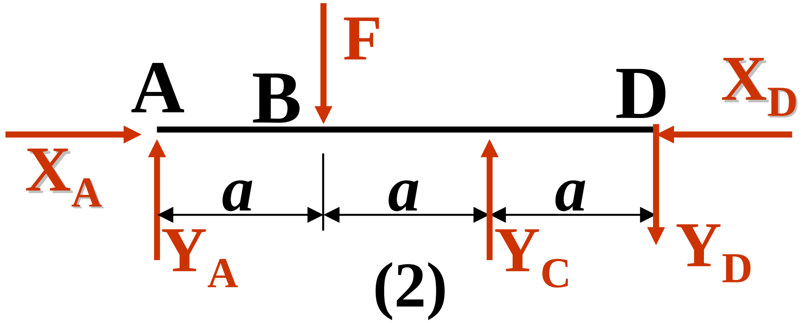
题3－13(a)解：



分析DH，因H是可动铰支座，Y_H沿竖向， DH受力如图(1)；

$$\sum M = 0 : Y_D = Y_H = F/2$$

$$\sum X = 0 : X_D = 0$$



AD受力如图(2)；

$$\sum m_A = 0 : 2aY_C - aF - 3aY_D = 0$$

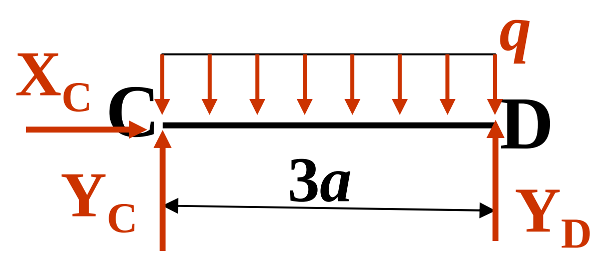
$$Y_C = 5F/4$$

$$\sum Y = 0 : Y_A - F + Y_C - Y_D = 0$$

$$Y_A = F/4$$

题3－13(*b*) F=2*qa*

解： CD受力如图(1)；



(1)

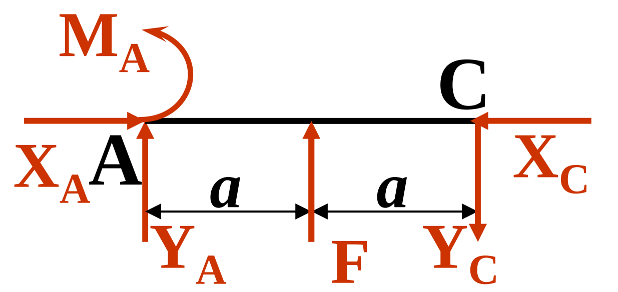
$$\sum X=0: X_C=0$$

$$\sum M_D=0: 9qa^2/2-3aY_C=0$$

$$\sum Y=0: Y_C+Y_D=3qa$$

$$\Rightarrow \quad Y_C=Y_D=3qa/2$$

AC受力如图(2)；



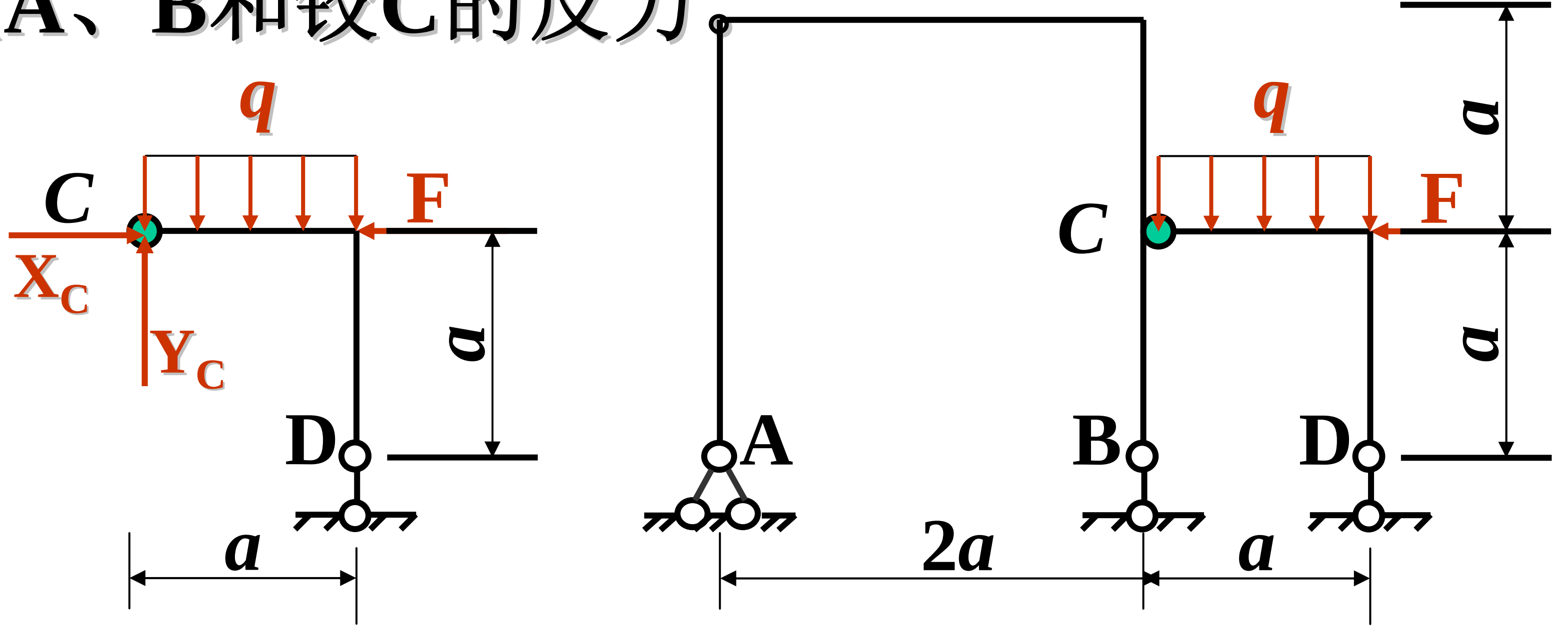
(2)

$$\sum X=0: X_A=0$$

$$\sum Y=0: Y_A=Y_C-F=-qa/2$$

$$\sum m_A=0: M_A=2aY_C-aF \Rightarrow M_A=a^2q$$

题3－14： 已知：a=3m, q=10kN/m ,F=30kN,求支座A、B和铰C的反力



解:

CD受力如图示；

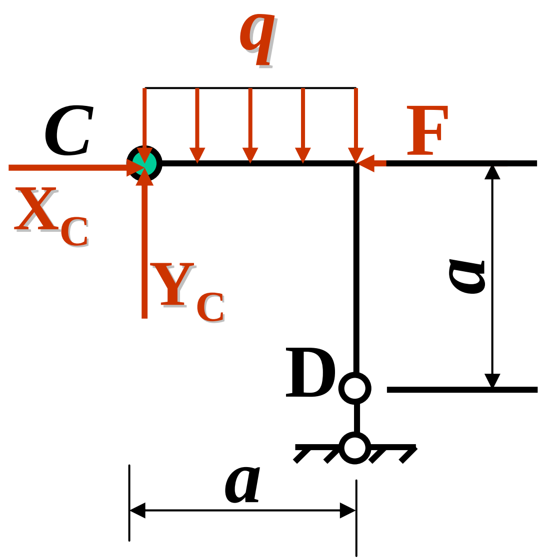
$$\sum X=0: X_C=F$$

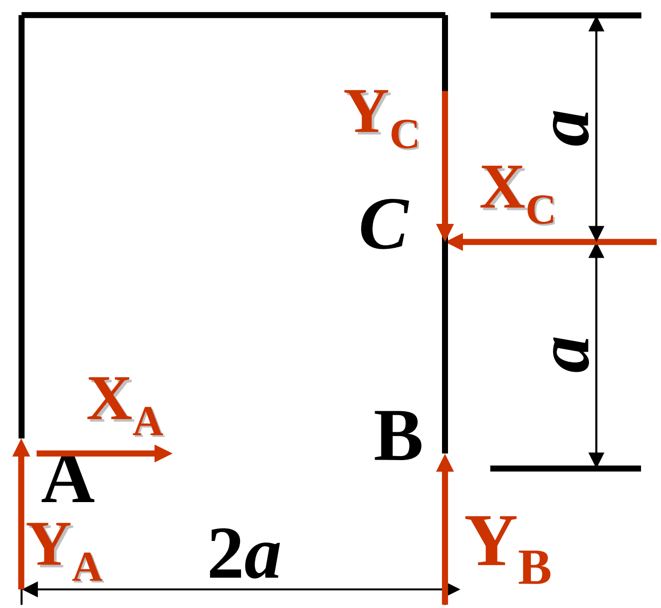
$$\sum M_D=0: qa^2/2=aY_C$$

$$X_C=30kN,\quad Y_C=15kN$$

续题3-14解

$$X_C = 30kN, \quad Y_C = 15kN$$





2）ABC受力如图示;

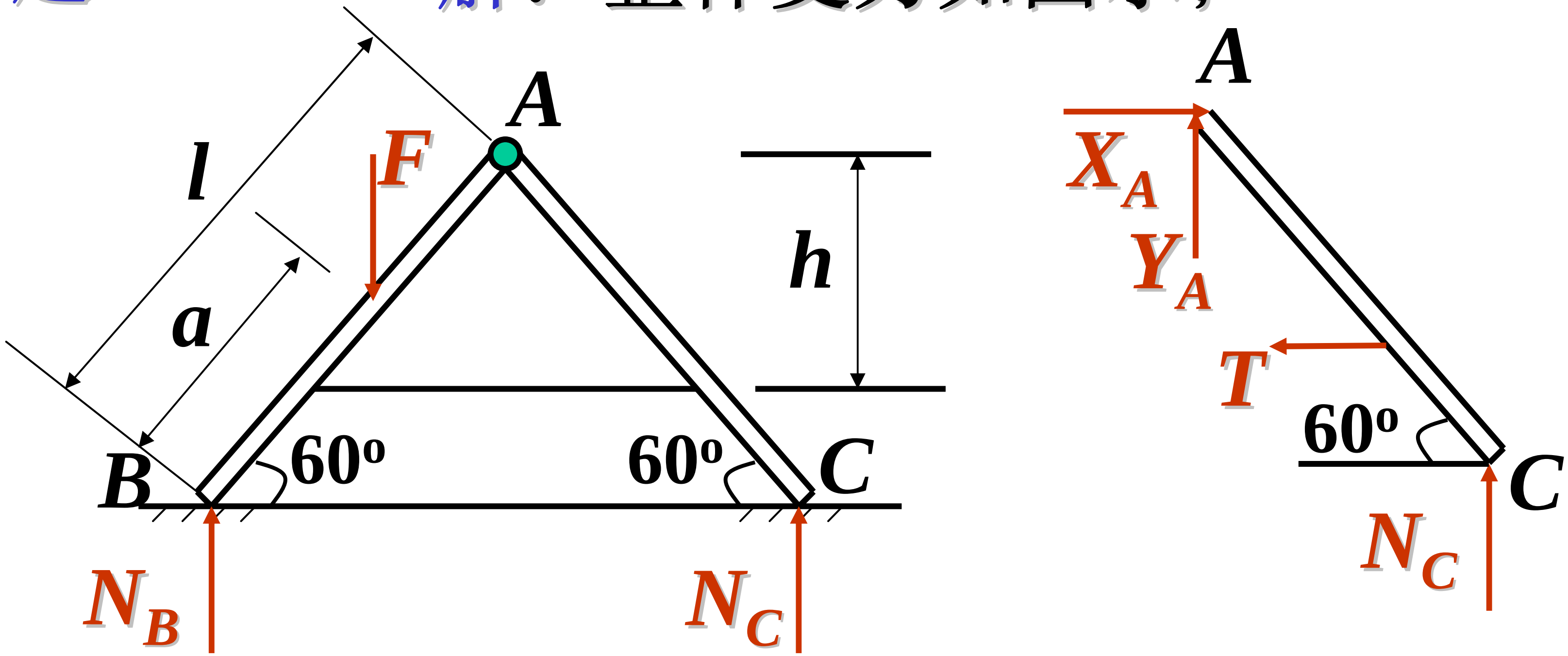
$$\sum X = 0 : X_A = X_C$$

$$\sum M_C = 0 : aX_A = 2aY_A$$

$$\sum Y = 0 : Y_B = Y_C - Y_A$$

$$\Rightarrow \quad X_A = 30kN, \quad Y_A = 15kN, \quad Y_B = 0$$

题3－16　**解**：整体受力如图示；



$$\sum M_B = 0 : \left(2lN_C - aF\right)\cos 60^o = 0$$

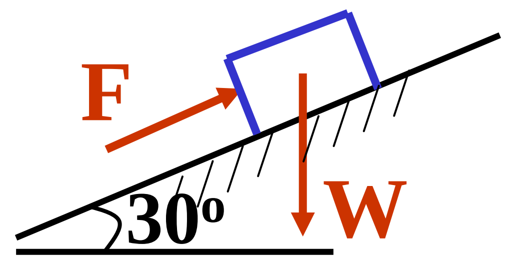
AC受力如图示；

$$\sum M_A = 0 : N_C l \cos 60^o = hT$$

$$\Rightarrow \quad N_C = aF/(2l), \quad T = aF/(4h)$$

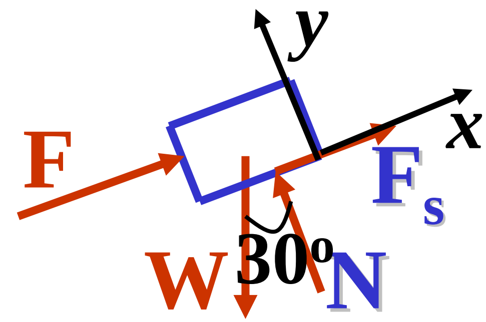
题3－18 已知：W =30N，f_s =0.25， f =0.24。F=10kN。 求：① 求滑块是否平衡状态？

②并求实际摩擦力。



解：设摩擦力向上，

①滑物受力如图(1)



(1)

$$\sum X=0: F_s = W\sin\alpha - F$$

$$F_s = 5kN$$

$$\sum Y=0: N = W\cos\alpha \approx 25.9kN$$

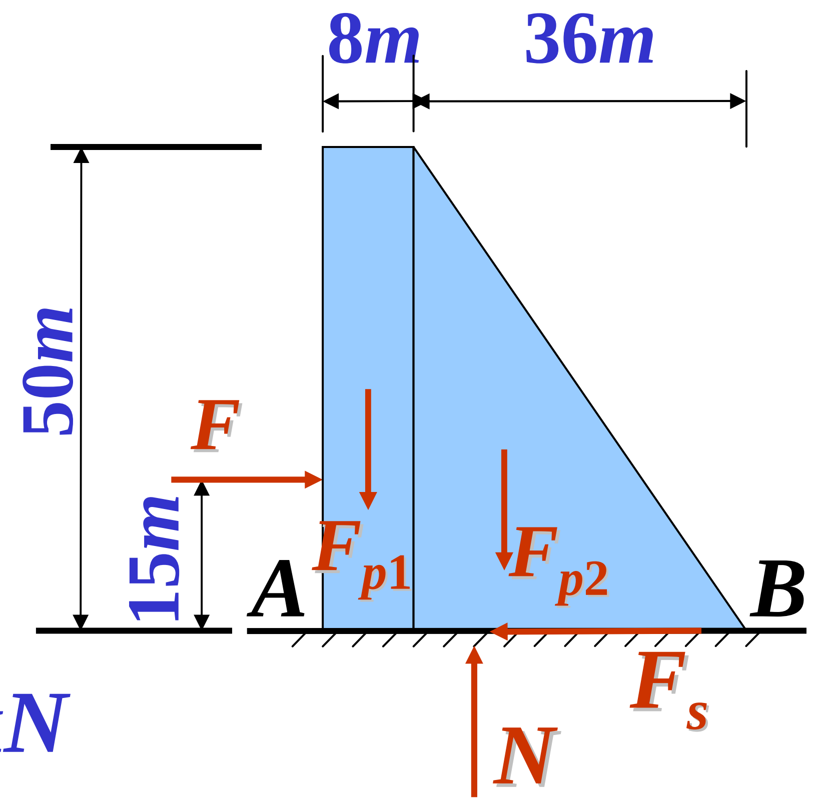
$$F_{s\max} = f_s N \approx 6.5kN > F_s = 5kN$$

滑块处于平衡状态，实际摩擦力为5kN。

题3-18: 1m长的水坝受到水压力F=9930kN，砼的堆密度为22kN/m³，静摩擦因素f_s=0.6。试问：

(1)此坝是否会滑动？

(2)此坝是否会绕B翻转？



解：

坝受力如图示；

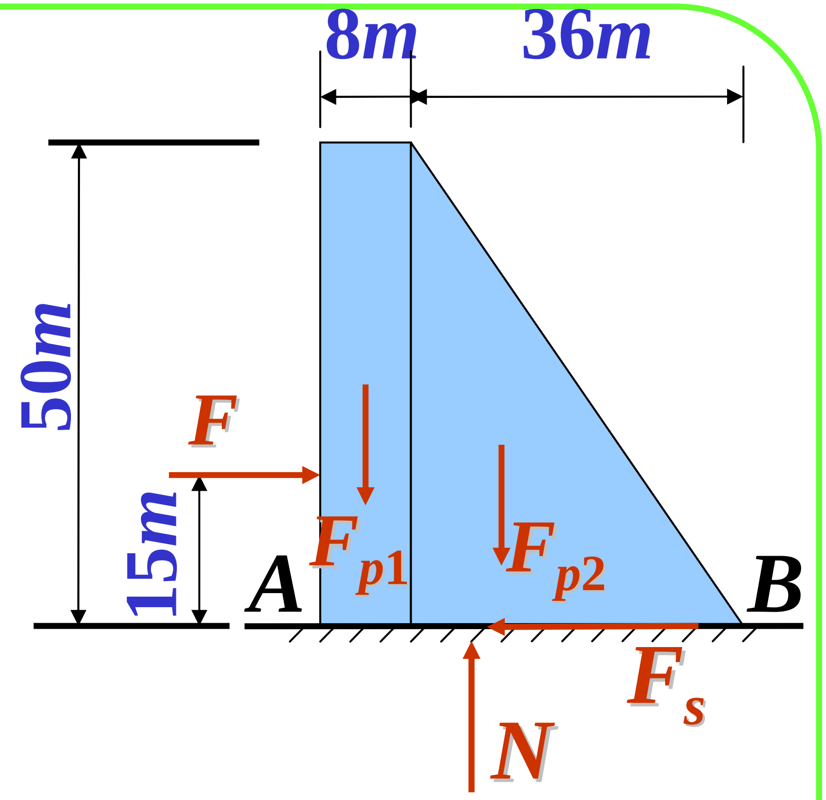
自重：

$$F_{p1}=22\times 50\times 8\times 1=8800kN$$

$$F_{p2}=22\times 50\times 36\times 1/2=19800kN$$

续题3-18解

F=9930kN，f_s=0.6。



$$F_{p1} = 8800kN$$

$$F_{p2} = 19800kN$$

$$\sum X = 0: F_s = -F$$

$$F_s = 9930 \ kN$$

$$\sum Y = 0: N = F_{p1} + F_{p2}$$

$$N = 28600kN$$

$$F_{s\,max} = f_s N = 17160\,kN > F_s = 9930\,kN$$

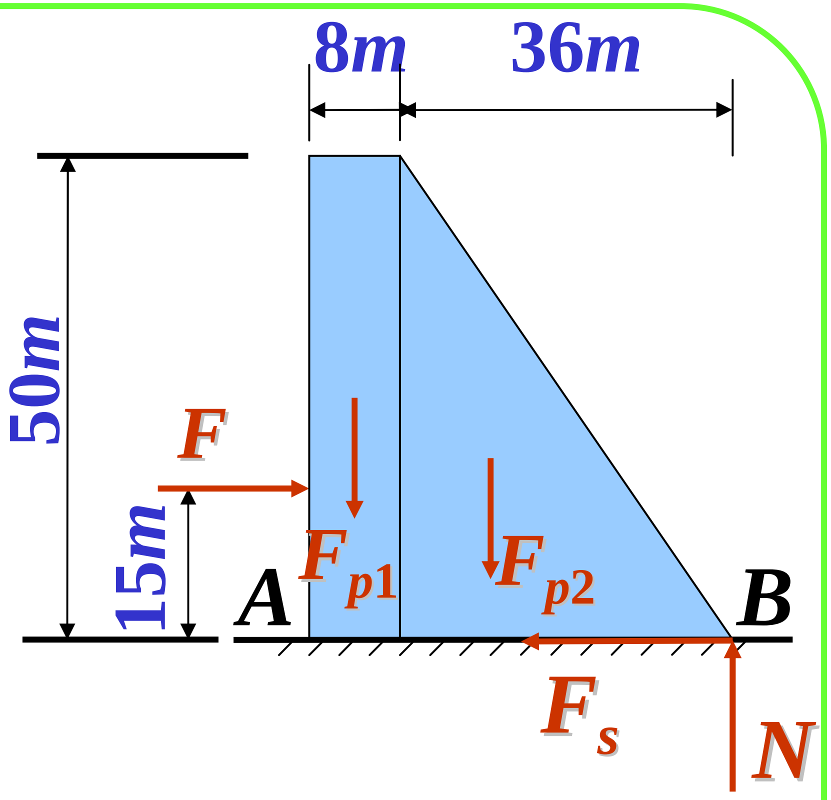
坝不会滑动。

F=9930kN，

$$F_{p1} = 8800kN$$

$$F_{p2} = 19800kN$$

$$N = 28600kN$$



考虑坝是否会绕B翻转

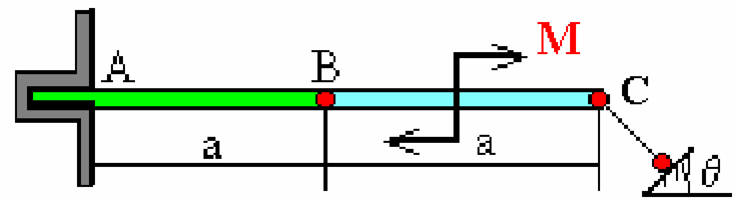
此时N位于B点，如图示。

$$M_{B翻} = 15F = 148950kN.m$$

$$M_{B稳} = 40F_{p1} + 36F_{p2} = 1064800kN.m$$

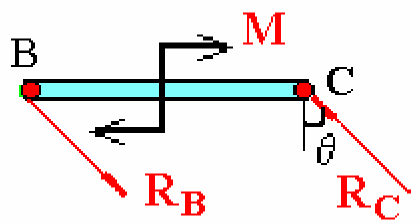
$M_{B稳} > M_{B翻}$ 坝不会绕B翻转。

补充题　解：



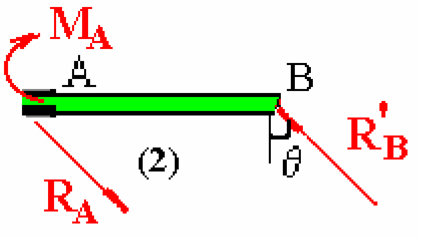
题 3-12 图

研究BC，受力如图示；



$$\sum M = 0: R_B \cdot a \cdot \sin\varphi = M$$
$$\Rightarrow R_B = R_C = M/(a \cdot \sin\varphi)$$

研究AB，受力如图（2）；



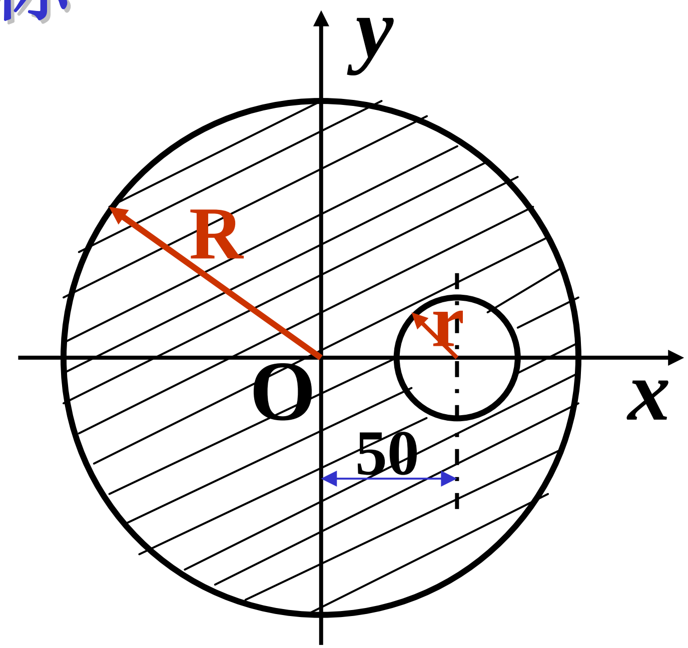
$$\sum M = 0: R_B \cdot a \cdot \sin\varphi = M_A$$
$$\Rightarrow \begin{cases} R_A = R_B = M/(a \cdot \sin\varphi) \\ M_A = M \end{cases}$$

4—9计算图示平面图形的坐标

(*a*)R=100mm,r=25mm

解：取坐标系如图示：

将截面分为实心、空心二圆，*x*是对称轴



$$A_1 = \pi R^2, \quad x_{c1} = y_{c1} = 0$$

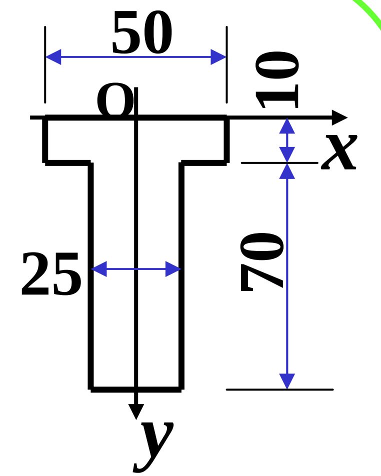
$$A_2 = -\pi r^2, \quad x_{c1} = 5cm, y_{c1} = 0$$

$$y_c = 0$$

$$x_c = \frac{\sum A_i x_i}{\sum A_i} = \frac{0 - \pi r^2}{\pi\left(R^2 - r^2\right)} \approx -0.07cm$$

4—9计算图示平面图形的坐标

(b)解：



将截面分为上下二矩形，*y*是对称轴，形心在y轴上。

$$A_1 = 5cm^2,\quad y_{c1} = 0.5cm$$

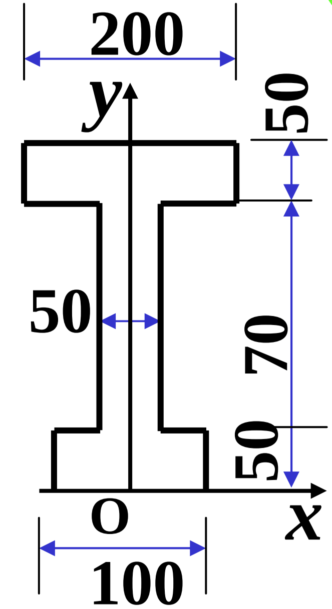
$$A_2 = 17.5cm^2,\quad y_{c2} = 4.5cm,$$

$$x_c = 0$$

$$y_c = \frac{\sum A_i x_i}{\sum A_i} = \frac{5\times 0.5 + 17.5\times 4.5}{5 + 17.5} \approx 36.1cm$$

4—9计算图示平面图形的坐标

(d)解：



将截面分为下、上三矩形，*y*是对称轴，形心在y轴上。

$$A_1 = 50cm^2, \quad y_{c1} = 2.5cm$$

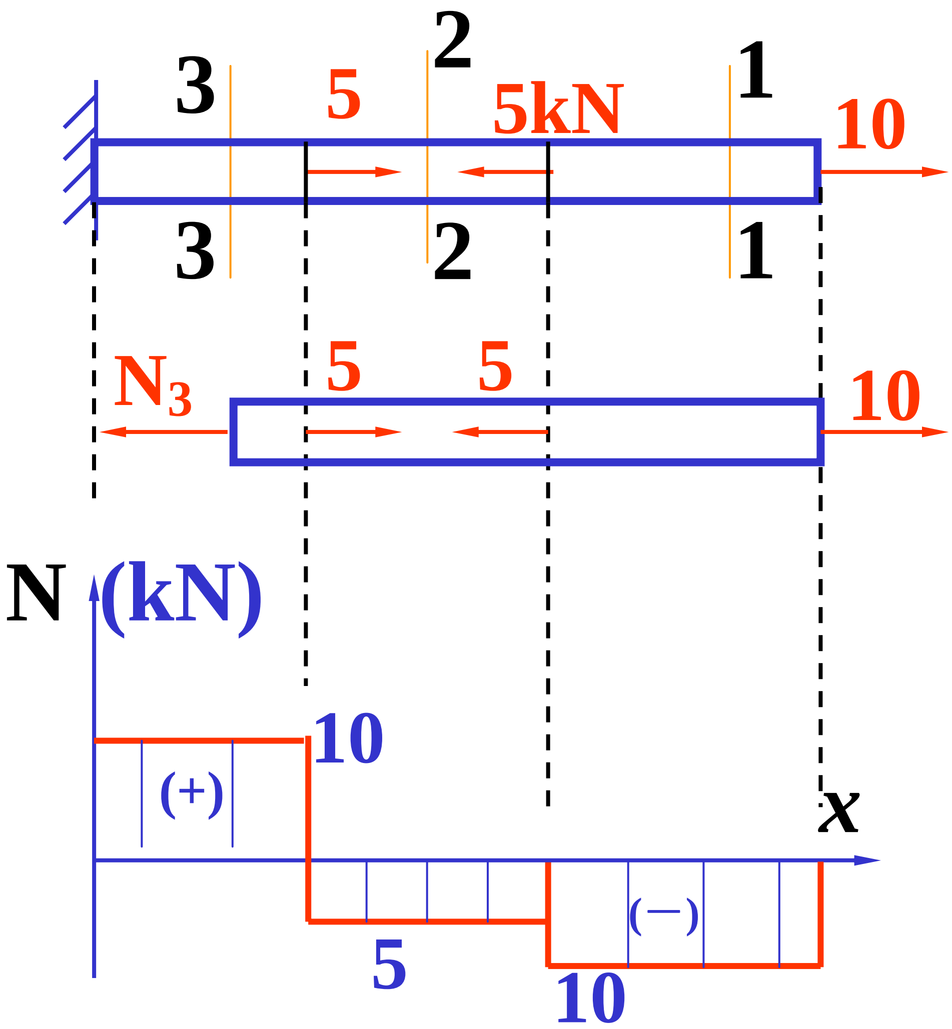
$$A_2 = 100cm^2, \quad y_{c2} = 15cm,$$

$$A_3 = 100cm^2, \quad y_{c3} = 27.5cm,$$

$$x_c = 0$$

$$y_c = \frac{\sum A_i x_i}{\sum A_i} = \frac{50\times 2.5 + 100\times(15+27.5)}{50+200} = 17.5cm$$

习5-1　绘下列杆件的轴力图



(b)解：用截面法，

如取3－3截面右边分析，如图示:

由平衡方程得:

N_3=10kN,

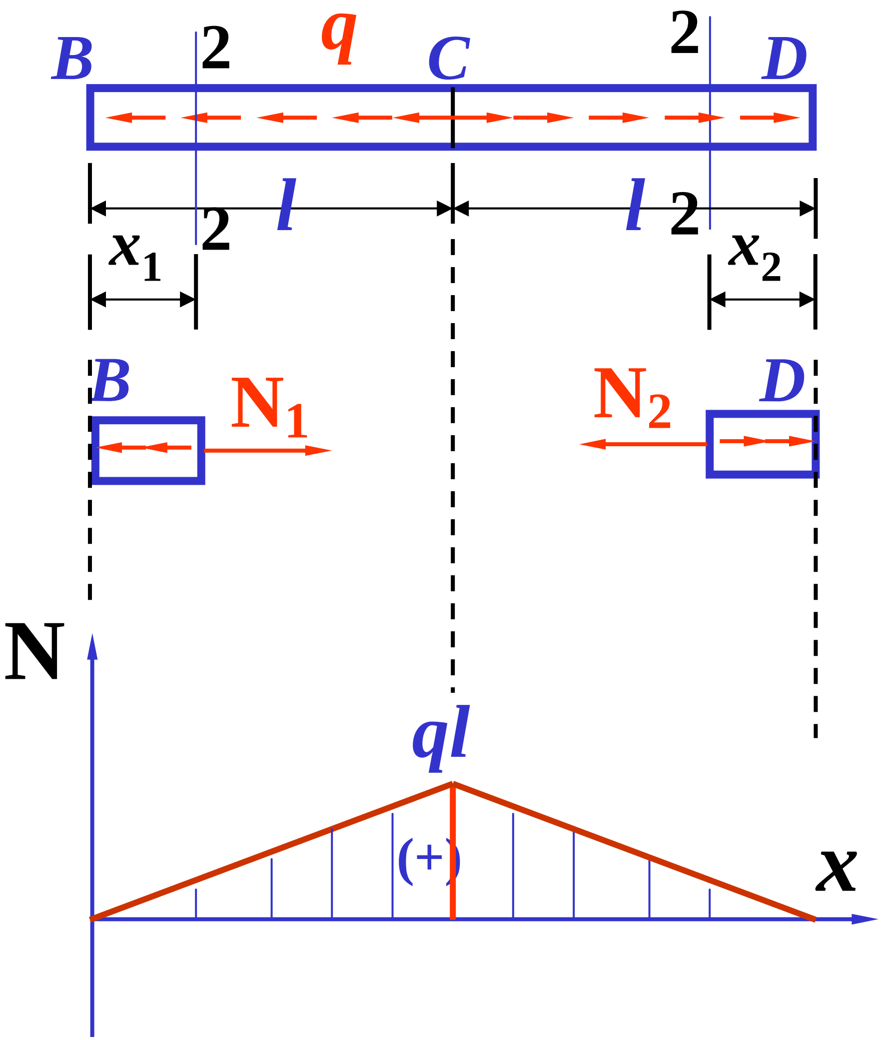
同理取1-1、2-2截面右边分析，得

N_2=5kN,

N1=10kN,

作轴力图。

习5-1 (c)



解：用截面法，

如取1-1截面左边、2-2截面右边分析，如图示：

由平衡方程得：

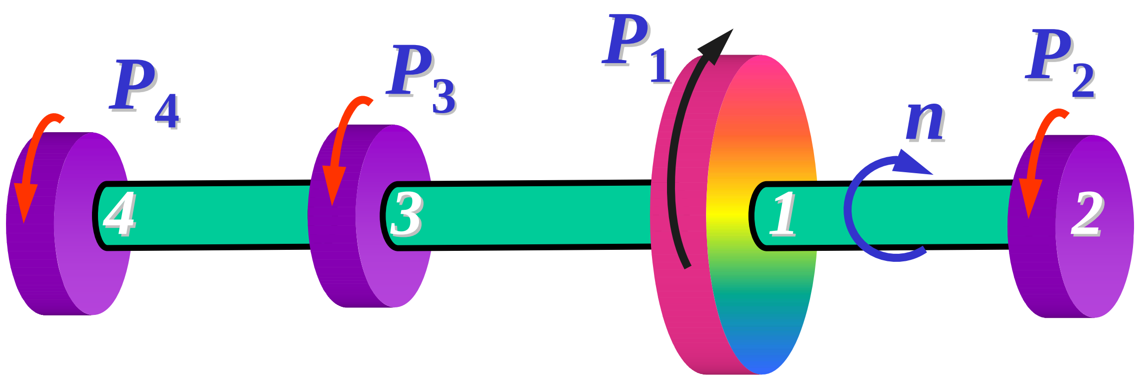
$N_1=qx_1$，（$<x_1<l$)，

$N_2=qx_2$，（$0<x_2<l$)

作轴力图；

习5-3: 传动轴转速$n=300rpm$,主动轮输入功率$P_1=50kW$，从动轮功率分别为$P_2=10kW$，$P_3=P_4=20kW$。试求:(1)作轴的扭矩图;

(2)　1、3位置对换，扭矩图有何变化?



解:

外力偶矩:

$$m_1=9550\frac{P_1}{n}=9550\times\frac{50}{300}=1590N\cdot m$$

$$m_2=318,\quad m_3=m_4=637N\cdot m,$$

$m_1 = 1590, m_2 = 318, m_3 = m_4 = 637 N \cdot m,$

求扭矩

$\Sigma M_x = 0:$

$T_1 + m_4 = 0$

T_1 =-637N.m

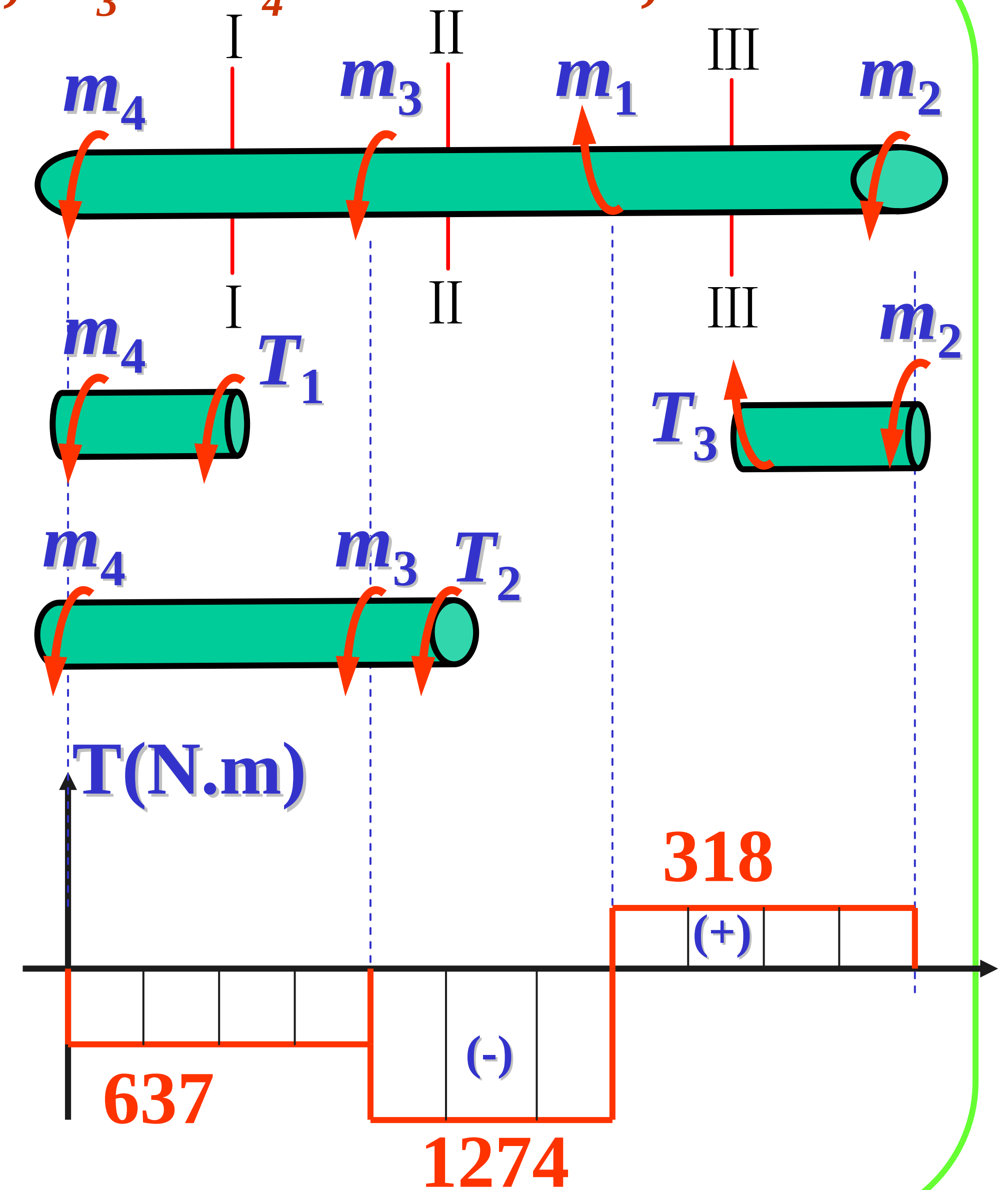
同理，得：

T_2=-1274 N.m

T_3 =318N.m

作扭矩图：

如图示。



续习5-3解

$m_1 = 1590, m_2 = 318, m_3 = m_4 = 637 N \cdot m,$

1、3位置对换后，扭矩计算如图示

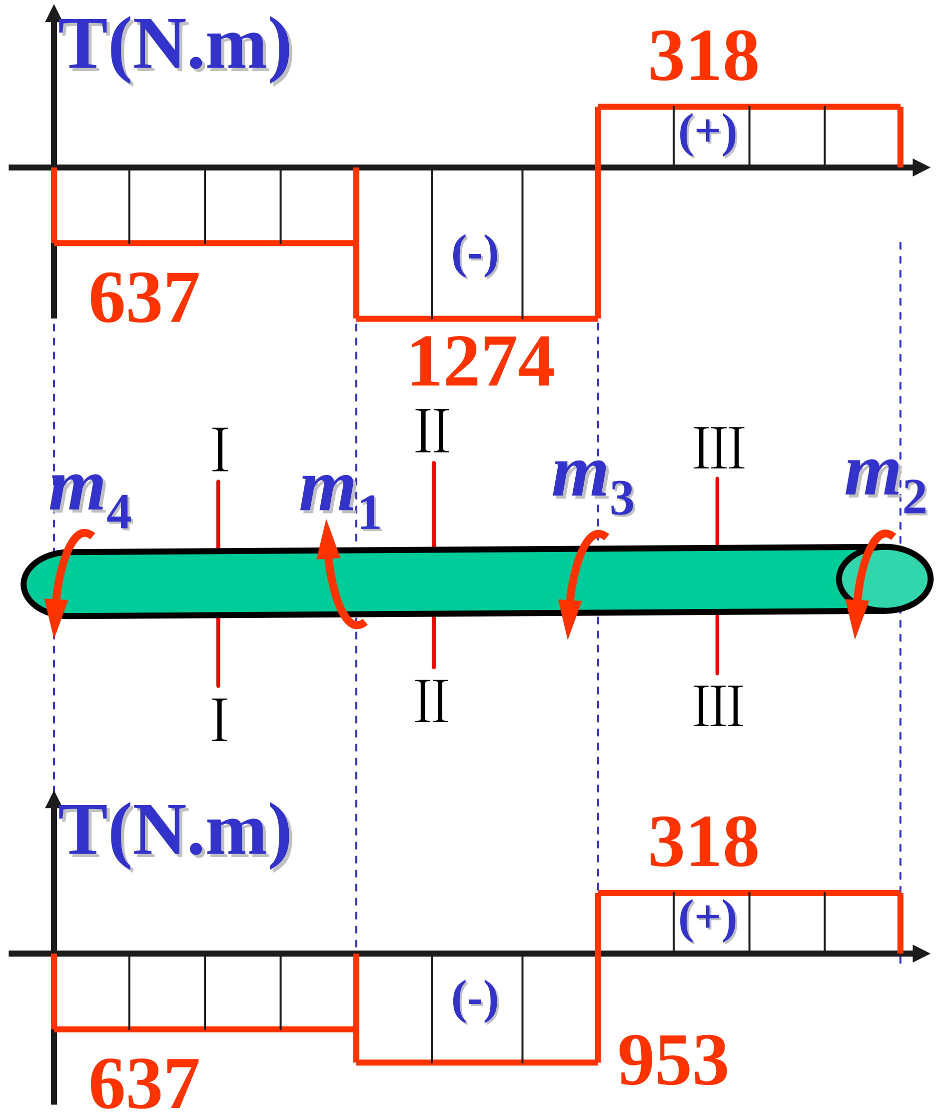
T_1 =-637N.m

T_2=953 N.m

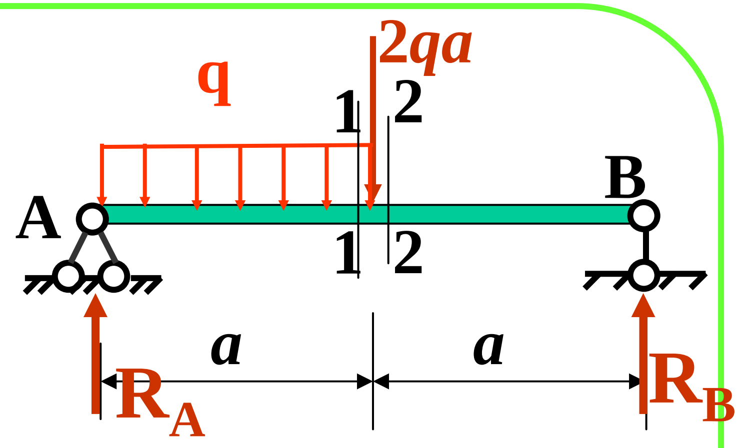
T_3 =318N.m

扭矩图如图示。

1、3位置对换后，中间段的扭矩变小了。



5-4（a）求指定截面的内力。

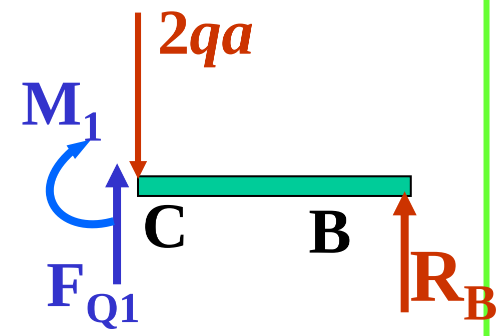


解：求支反力

$$R_A = 7qa/4, \quad R_B = 5qa/4$$

1-1面内力：

分析1-1面右边：

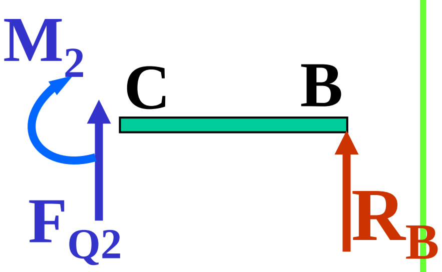


$$F_{Q1} = 2qa - R_B = 3qa/4$$

$$M_1 = aR_B = 5qa^2/4$$

2-2面内力：

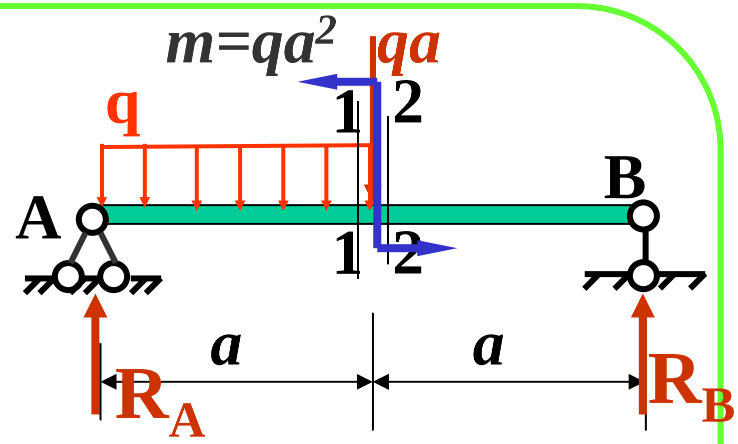
分析2-2面右边：



$$F_{Q2} = -R_B = -5qa/4$$

$$M_1 = aR_B = 5qa^2/4$$

5-4（c）求指定截面的内力。



解:　求支反力

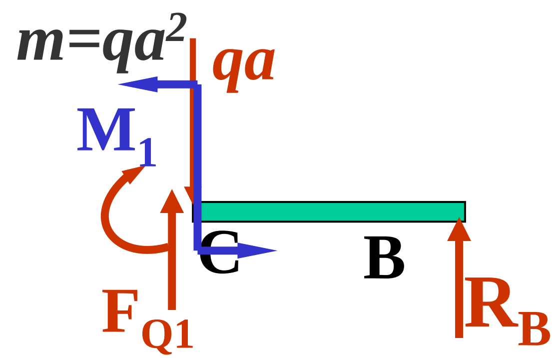
$$R_A = 3qa/2,\quad R_B = qa/2$$

1-1面内力:

分析1-1面右边:

$$F_{Q1} = qa - R_B = qa/2$$

$$M_1 = aR_B + M = 3qa^2/2$$

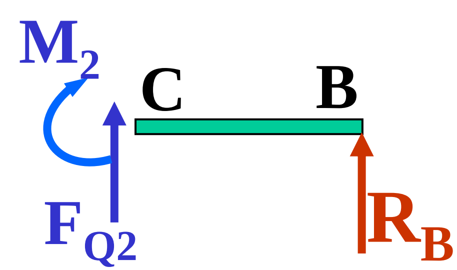


2-2面内力:

分析2-2面右边:

$$F_{Q2} = -R_B = -qa/2$$

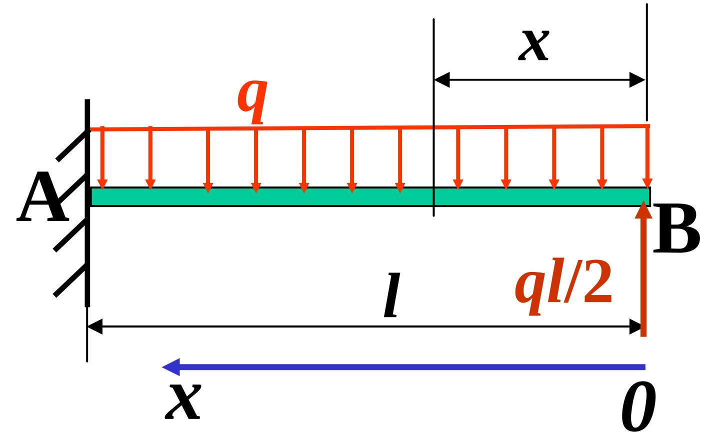
$$M_1 = aR_B = qa^2/2$$



$m=qa^2$

5-5（a）写出梁的内力方程。并作内力图。

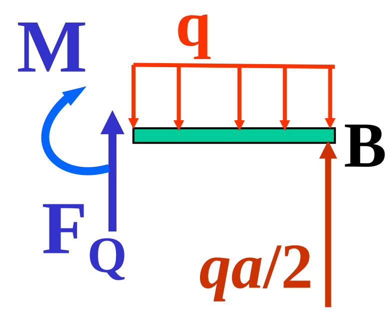
解: 内力方程



取任一截面右边分析

$$F_Q(x)=qx-\frac{ql}{2}\quad(0\le x<l)$$

$$M(x)=\frac{ql}{2}x-\frac{qx^2}{2}(0\le x<l)$$



求控制截面的剪力

$$x=0:F_Q=-ql/2$$

$$x=l:F_Q=ql/2$$

续习5-5(a)解

$$M(x)=\frac{qx}{2}(l-x);\ (0\le x<l)$$

$x=0:F_Q=-ql/2$

$x=l:F_Q=ql/2$

绘剪力图。

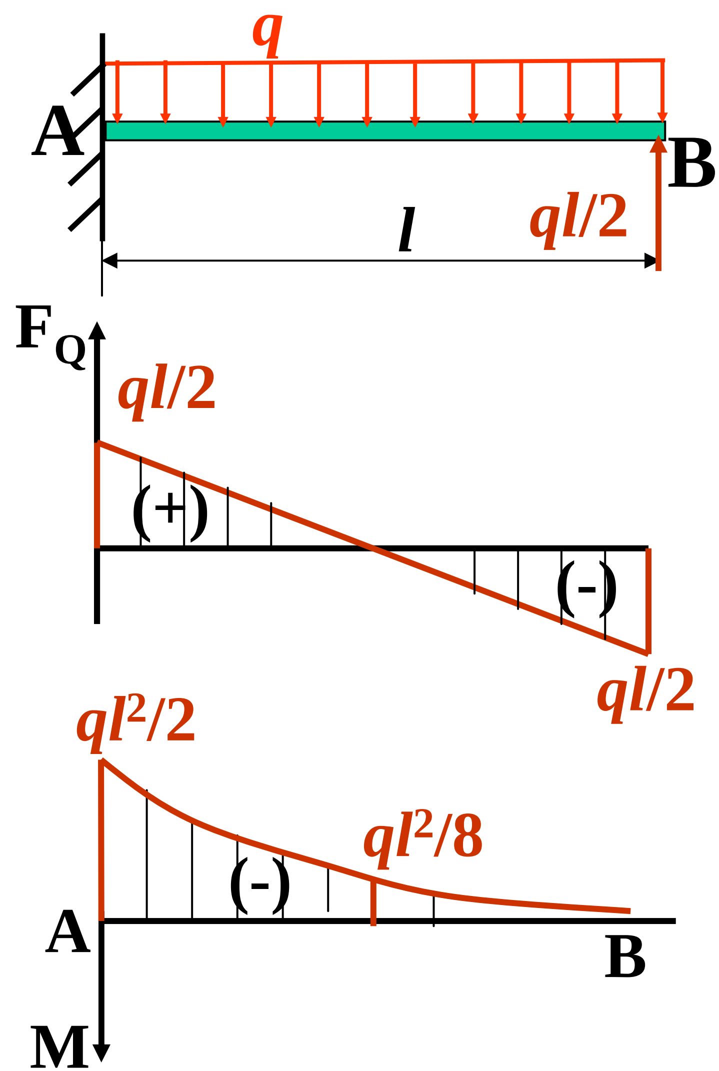
求控制截面的M：

$x=0:M=0;$

$x=l/2:M=ql^2/8$

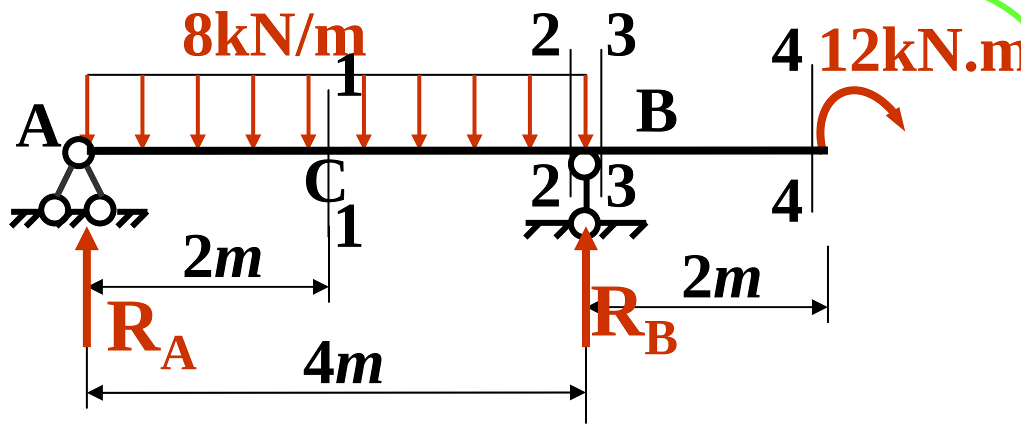
$x=l:M=ql^2/2$

绘M图。



续习5-5(a)解

6-20(d): 解:



(1)求支反力

$$R_A = 13\,kN,$$

$$R_B = 19\,kN$$

1-1面:

$$F_{s1} = 13 - 16 = -3\,kN$$

$$M_1 = 13 \times 2 - 8 \times 2 \times 1 = 10kN \cdot m$$

2-2面:

$$F_{s2} = -19\,kN$$

$$M_2 = -12kN \cdot m$$

3-3面: $F_{s3} = 0\,kN,\quad M_3 = -12kN \cdot m$

4-4面: $F_{s4} = 0\,kN,\quad M_4 = -12kN \cdot m$

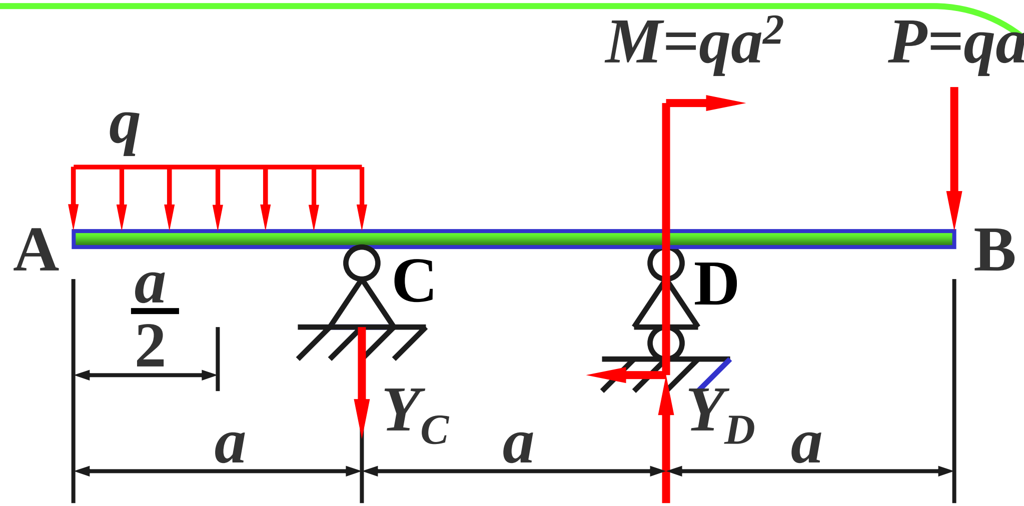
续：课堂练习解答

解（5）：

支反力:

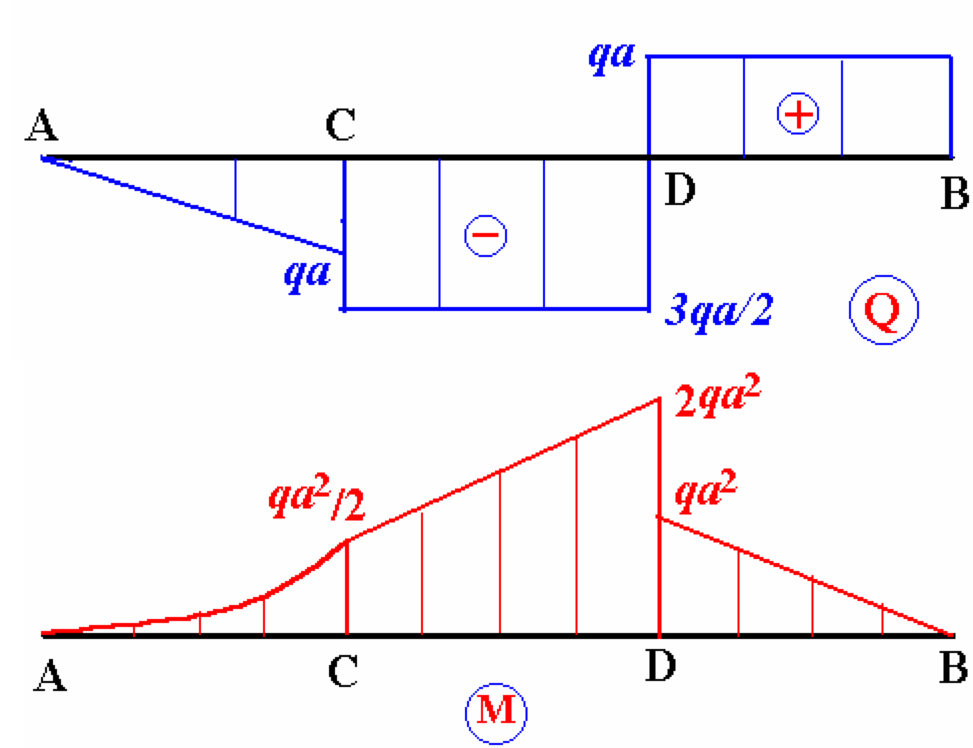
$Y_C=qa/2$

$Y_D=5qa/2$

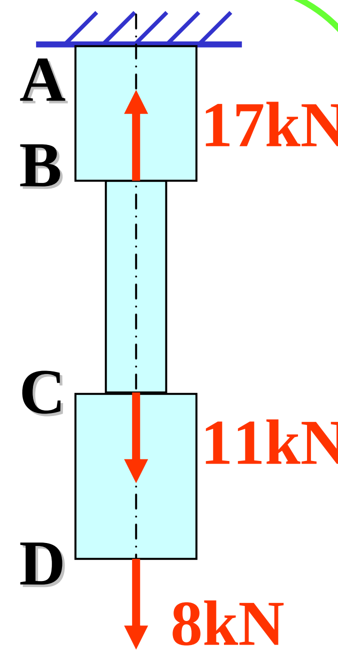


作Q图,

作M图.



习6-1(*a*)　求杆内最大应力。AB、BC、CD的横截面面积分别为：80mm²、20mm²、120mm²。



解：用截面法得AB、BC、CD段的轴力分别为：　$N_1=2kN$，$N_2=19kN$，　$N_3=8kN$,

应力：

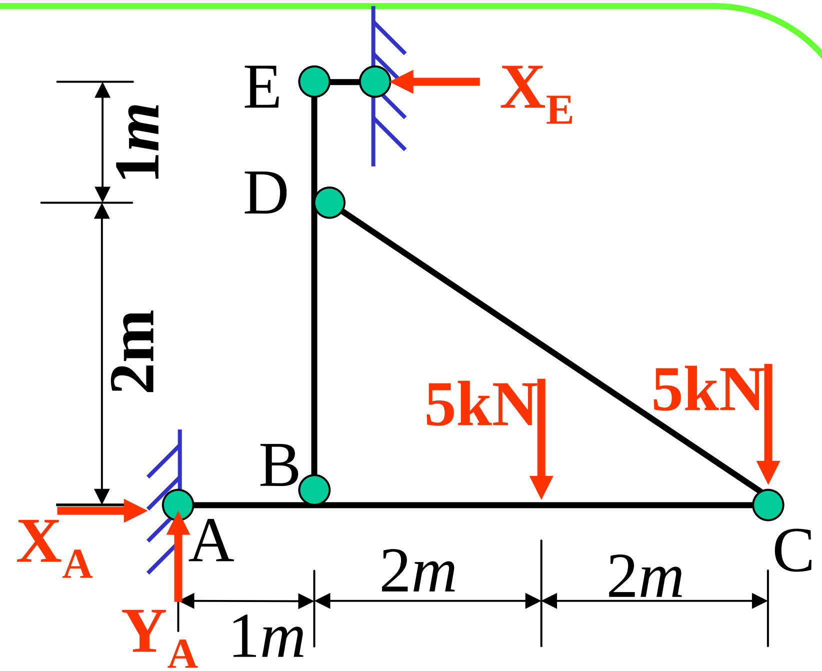
$$\sigma_1=\frac{N_1}{A_{AB}}=\frac{2000}{80}=25MPa$$

$$\sigma_2=N_2/A_{BC}=950MPa$$

$$\sigma_3=N_3/A_{CD}=66.7MPa$$

$$\sigma_{max}=950MPa$$

习6-2(*a*)　求直径d=20mm的拉杆的应力。

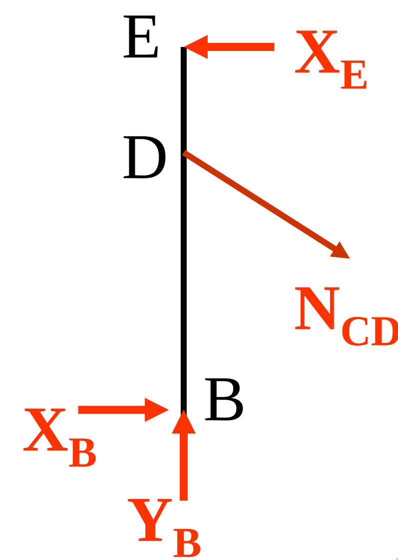


解：分析整体：

$$\sum M_A = 0 : X_E = 10kN$$

分析BE杆：

$$\sum M_B = 0 : N_{CD} = (50/3)kN$$

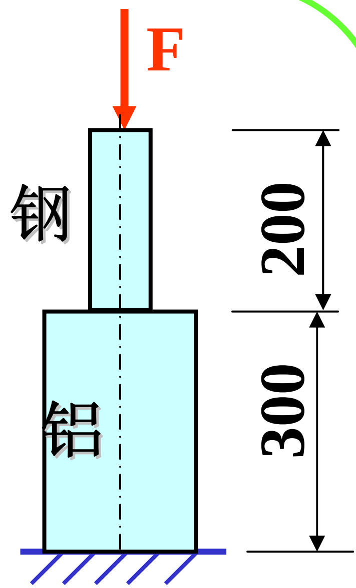


CD杆的面积：　$A_{CD} = \left(2^2 \times 10^{-4} \pi / 4\right) m^2$

CD的应力：

$$\sigma = N_{CD} / A_{CD} = 500/(3\pi) \approx 53MPa$$

习6-4　上段横截面是边长为100mm的正方形，下段横截面是边长为200mm的正方形，总长度减小了0.4mm，$E_{钢}$＝200GPa，$E_{铝}$＝70GPa。求F值。

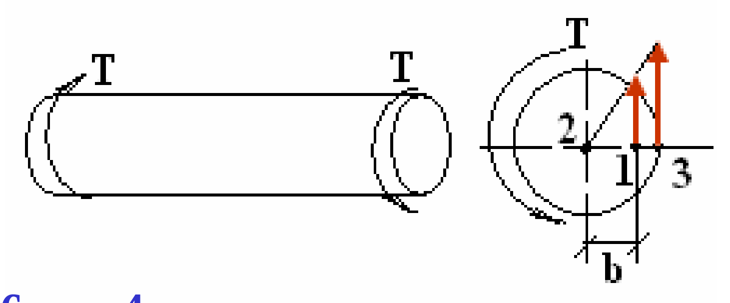


解：轴力N＝-F

$$\Delta l = F\left|\left(\frac{l}{EA}\right)_1 + \left(\frac{l}{EA}\right)_2\right| = 0.4mm$$

$$F = \frac{4\times10^{-4}}{\dfrac{0.2}{2\times10^{11}\times0.1^2}+\dfrac{0.3}{7\times10^{10}\times0.2^2}} \approx 1931kN$$

习6-7 轴直径d=60mm，T＝2kN.m，求截面上1、2、3点的τ和τ$_{max}$，并在图画出切应力的方向，b=20mm。



解： 极惯性矩:

$$I_p = \frac{\pi \times 6^4 \times 10^{-8}}{32} \approx 1.27 \times 10^{-6}\ m^4$$

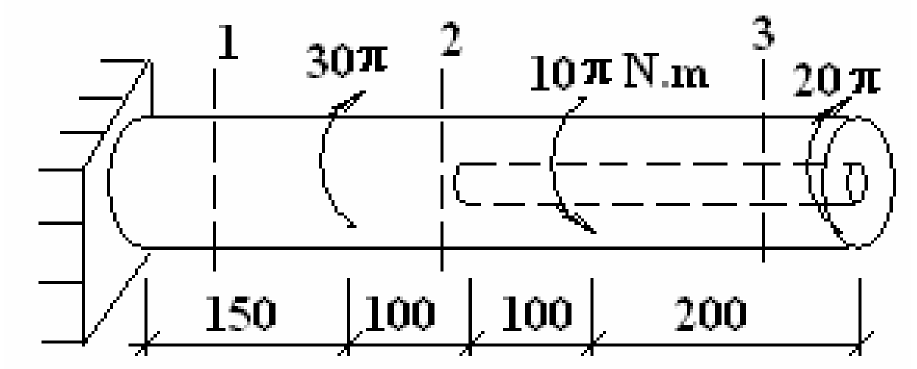
$$\tau_1 = \frac{T}{I_p} \cdot b = \frac{2 \times 10^3}{1.27 \times 10^{-6}} \times 2 \times 10^{-2} \approx 31.5 MPa$$

$$\tau_2 = 0$$

$$\tau_3 = \frac{T}{I_p} \cdot \frac{d}{2} = \frac{2 \times 10^3}{1.27 \times 10^{-6}} \times 3 \times 10^{-2} \approx 47.15 MPa$$

习6-9　求图示轴的 τ_{max} 和两端的相对扭转角（G＝80GPa）。D=30mm, d=10mm。

解：作扭矩图

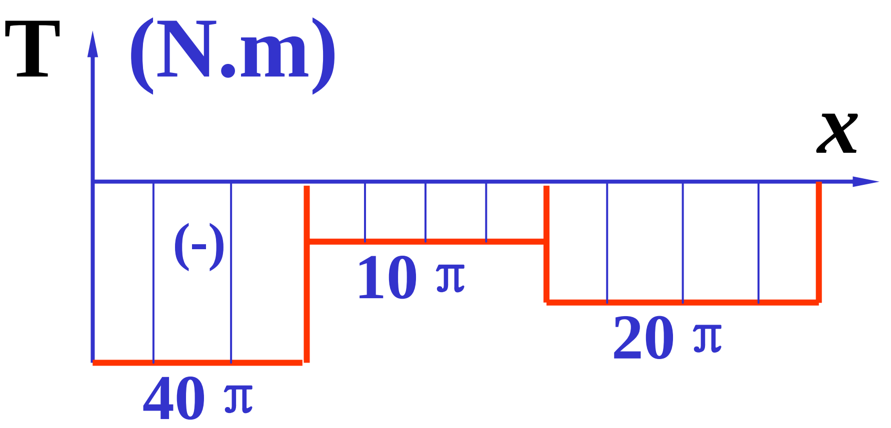


求极惯性矩:

分两段计算,

实心段:

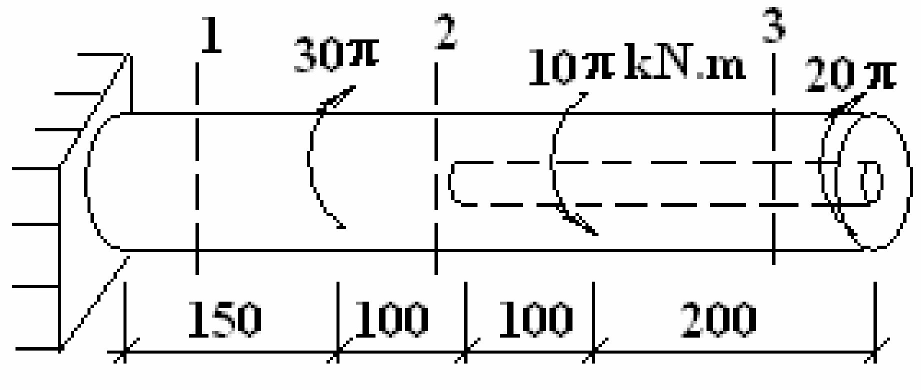
$$I_{p1}=\frac{81\pi}{32}(cm)^4$$



空心段:

$$I_{p3}=\frac{80\pi}{32}(cm)^4$$

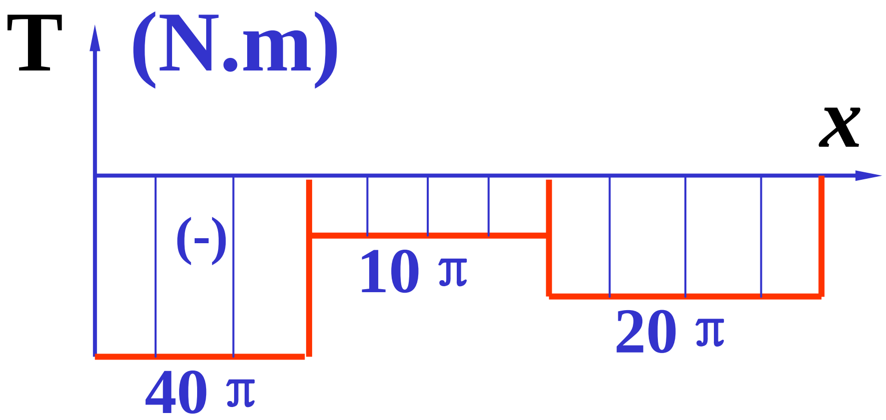
计算 τ_{max}：



$$\tau_1 = \frac{T_1}{I_{p1}}\frac{D}{2}$$

$$= \frac{40\pi \times 32}{81\pi \times 10^{-8}} \cdot \frac{30}{2} \times 10^{-3}$$

$$= 23.7 MPa$$



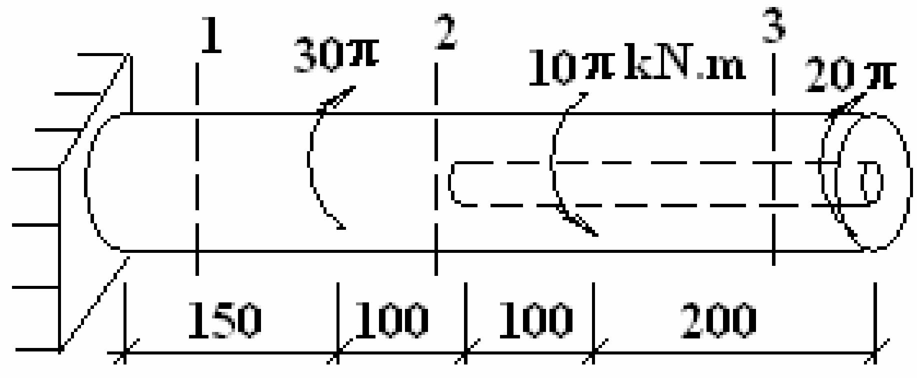
$$\tau_3 = \frac{T_3}{I_{p3}}\frac{D}{2}$$

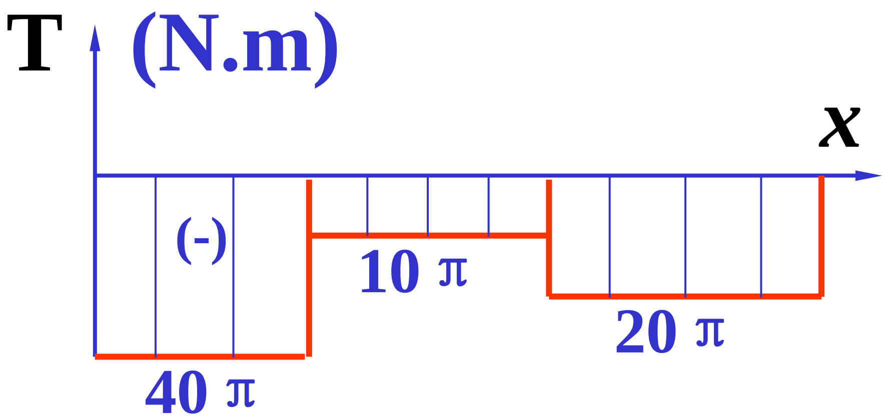
$$= \frac{20\pi \times 32}{80\pi \times 10^{-8}} \cdot \frac{30}{2} \times 10^{-3} = 12 MPa$$

$$\tau_{max} = 23.7 MPa$$

计算两端的扭转角：

要分四段计算



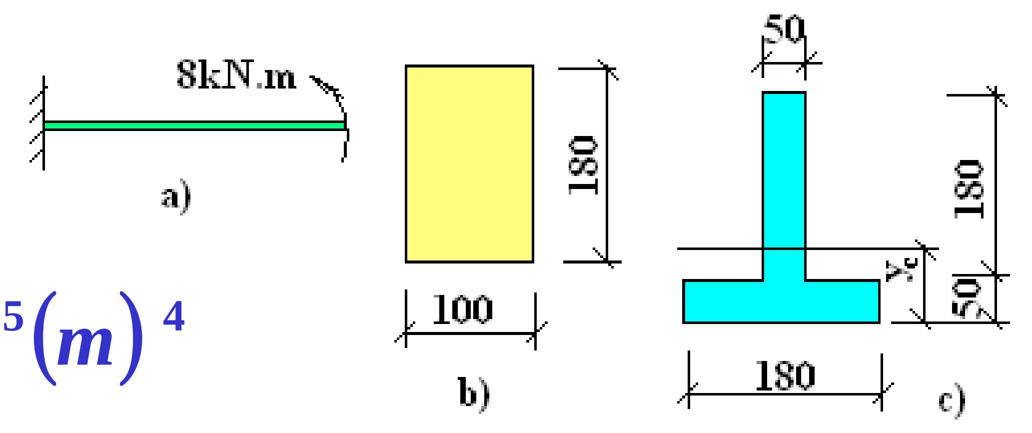


$$\varphi = \frac{0.15T_1 + 0.1T_2}{GI_{p1}} + \frac{0.1T_2 + 0.2T_3}{GI_{p3}}$$

$$= \frac{32\pi \times 10^8}{8\pi \times 10^{10}} \left(\frac{0.15 \times 40 + 0.1 \times 10}{81} + \frac{0.1 \times 10 + 0.2 \times 20}{80} \right)$$

$$\varphi = 0.00597 rad$$

习6-12 求图示梁的两截面形式，分别求梁的曲率半径、最大拉、压应力及所在位置（E＝200GPa）。



解： 惯性矩:

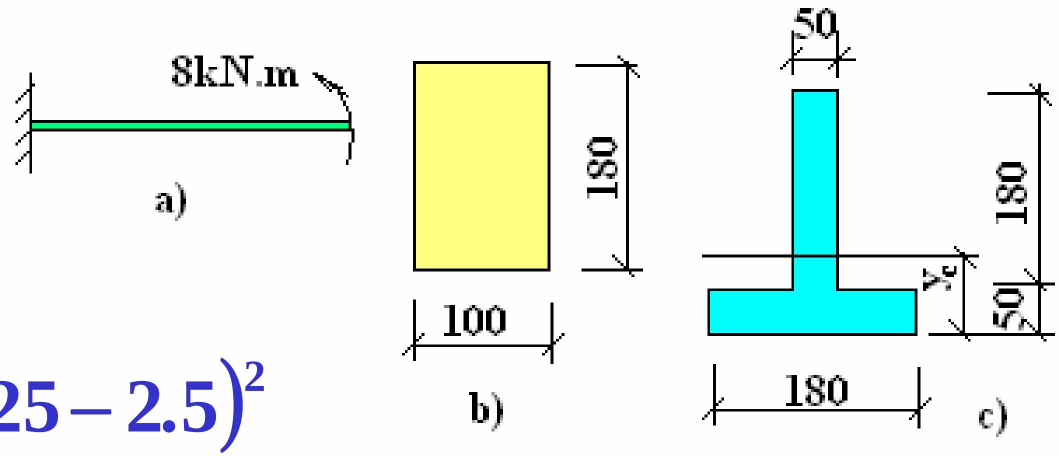
$$I_{zb} = \frac{b}{12}h^3 = 4.86\times10^{-5}(m)^4$$

c)图的形心位置:

$$y_c = \frac{18\times5(2.5+14)}{18\times5\times2} = 8.25(cm)$$

c)图的惯性矩:

$$I_{zb}=4.86\times10^{-5}(m)^4$$



c)图的惯性矩:

$$I_{zc}=\frac{18}{12}\times5^3+18\times5(8.25-2.5)^2$$

$$+\frac{5}{12}\times18^3+18\times5(14-8.25)^2=8.57\times10^{-5}(m)^4$$

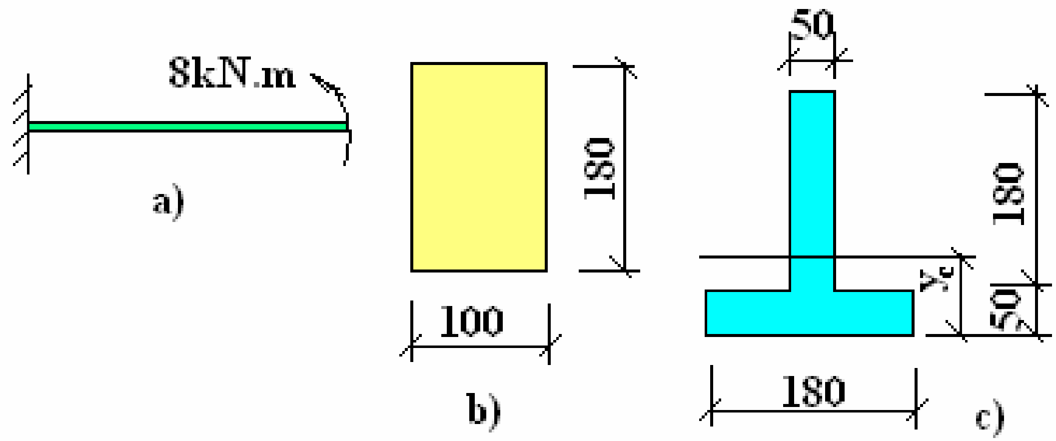
b梁的曲率半径、最大拉、压应力:

$$\rho=\frac{EI_z}{M}=\frac{2\times10^{11}\times4.86\times10^{-5}}{8\times10^3}=1215m$$

$$\sigma_{max}^{+}=\sigma_{max}^{-}=\frac{M}{I_z}\cdot\frac{h}{2}=\frac{8\times10^3}{4.86\times10^{-5}}\times90\times10^{-3}=14.8MPa$$

$$y_c = 8.25(cm)$$

$$I_{zc} = 8.57\times10^{-5}(m)^{4}$$



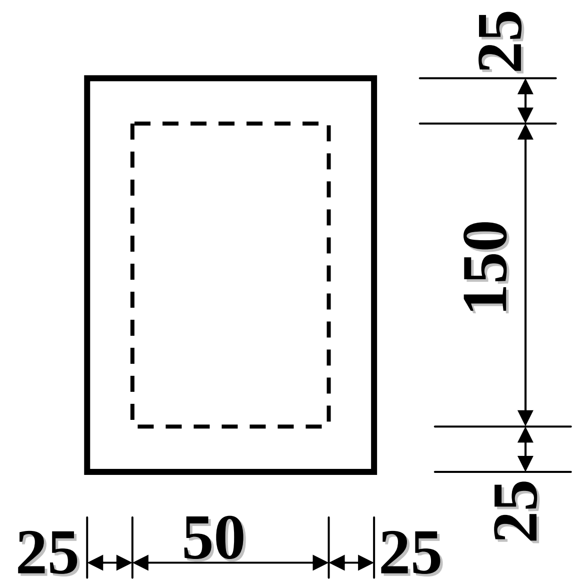
c) 梁的曲率半径、最大拉、压应力:

$$\rho = \frac{EI_z}{M} = \frac{2\times10^{11}\times8.75\times10^{-5}}{8\times10^{3}} = 2187.5m$$

$$\sigma^{+}_{max} = \frac{M}{I_z}\cdot y_c = \frac{8\times10^{3}}{8.57\times10^{-5}}\times8.25\times10^{-2} = 7.7MPa$$

$$\sigma^{-}_{max} = \frac{8\times10^{3}}{8.57\times10^{-5}}\times(23-8.25)\times10^{-2} = 13.77MPa$$

习6-14(a) 图示两梁的横截面最大正应力40MPa。问：（1）梁矩形截面挖去图中虚线内面积时，弯矩减小百分之几?



解：实心时承担的弯矩

$$M_1 = 2\sigma I_{z1}/h$$

空心时承担的弯矩

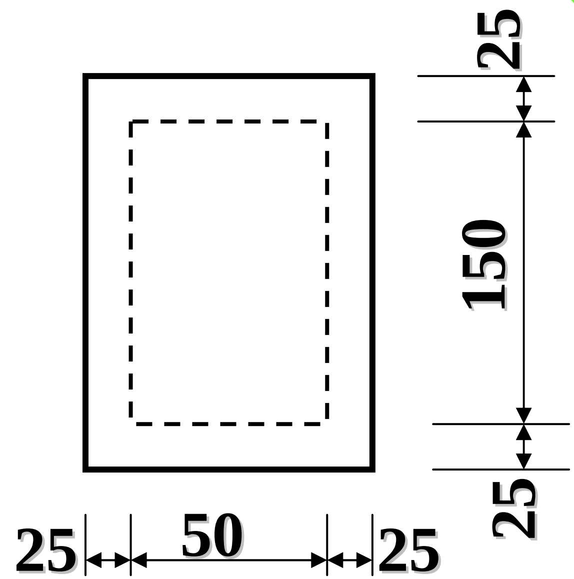
$$M_2 = 2\sigma I_{z2}/h$$

挖空后弯矩减小的百分数：

$$\frac{M_1 - M_2}{M_1} = \frac{2\sigma(I_{z1} - I_{z2})h}{2\sigma h I_{z1}} = \frac{(I_{z1} - I_{z2})}{I_{z1}} 100\%$$

挖空后弯矩减小的百分数：

$$\frac{M_1-M_2}{M_1}=\frac{\left(I_{z1}-I_{z2}\right)}{I_{z1}}100\%$$



$$I_{z1}=\frac{10}{12}\times 20^3 cm^4$$

$$I_{z2}=\frac{10\times 20^3-5\times 15^3}{12}cm^4$$

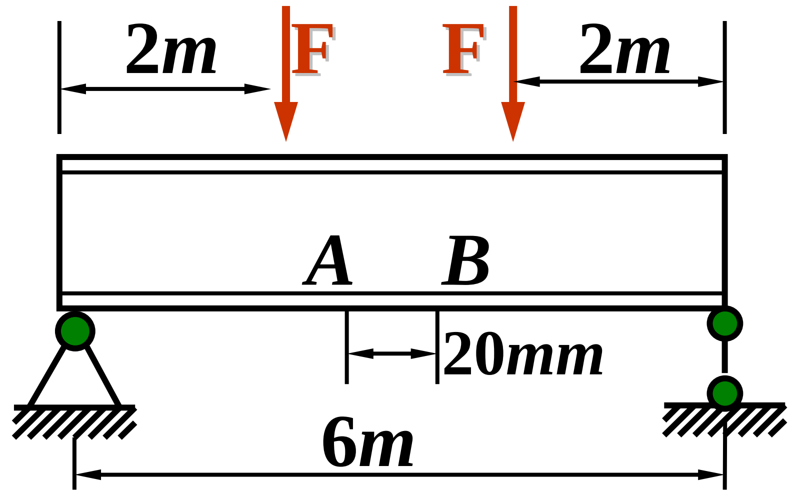
$$\frac{M_1-M_2}{M_1}=\frac{\left(8-8+0.5\times 1.5^3\right)\times 10^4}{8\times 10^4}100\%$$

$$\approx 21.1\%$$

习6-16: 梁为I45a，测得A、B两点的伸长量为0.012mm，E=200GPa，问力F＝？

解: 中间段纯弯曲，

其弯矩 M＝2F



A、B点的应力：

$$\sigma = M_1 / W_z = 2F / W_z$$

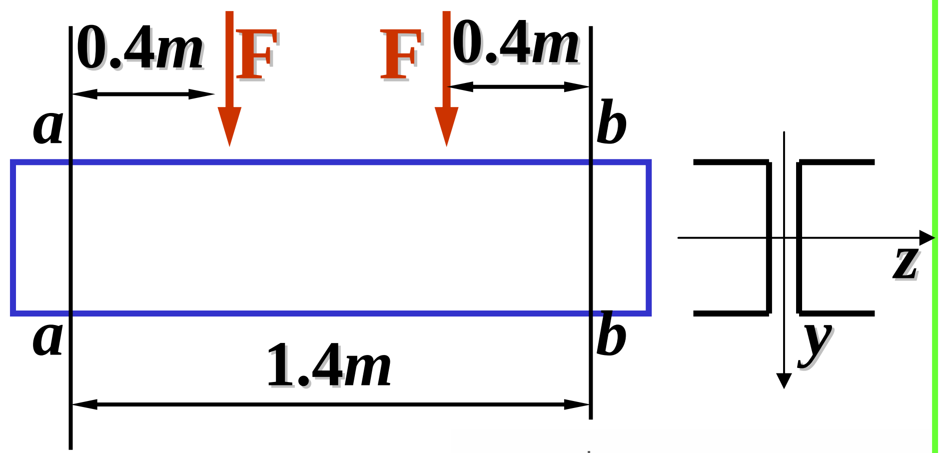
$$W_z = 1430 cm^3$$

由胡克定律：

$$\sigma = E\varepsilon\,, \quad \Delta l = 1.2\times 10^{-5} = 2\times 10^{-3}\cdot\varepsilon$$

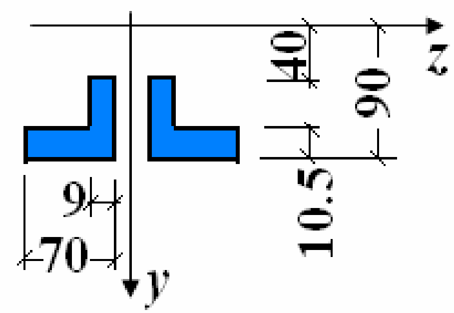
$$F = \frac{E\varepsilon W_z}{2} = \frac{1.2\times 10^{-5} E W_z}{2\times 2\times 10^{-2}} \approx 85.5kN$$

习6-18： 梁由两个18号槽钢组成，a-a面上的F_Q=18kN，M=55kN.m，求b-b面中性轴以下40mm处的正应力和剪应力。



解： 由图知，b-b的内力与*a-a*面的相同。

查表得一个18号槽钢的截面几何特性：



$$b=70mm,h=180mm,$$

$$d=9mm,t=10.5mm,I_{z1}=1369.9cm^4$$

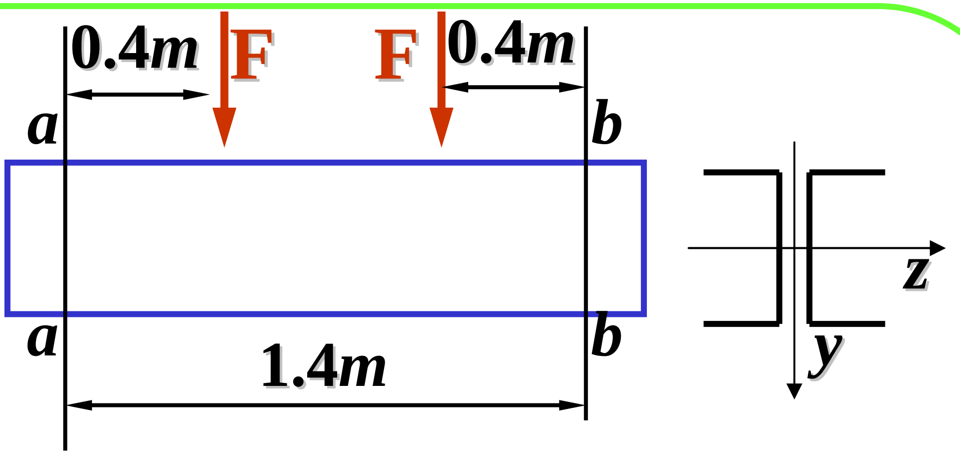
z轴以下40mm处面积对z轴的静矩：

$$S_{z1}=50\times9\times65+61\times10.5\times(90-5.25)=8.353\times10^4mm^3$$

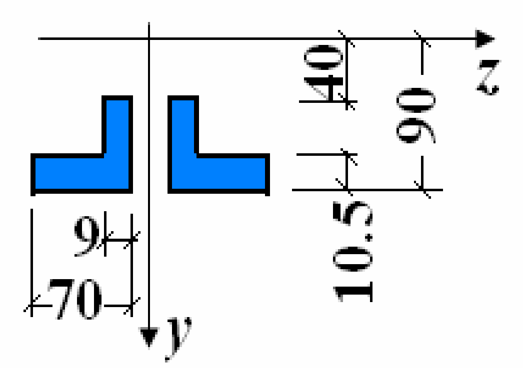
18号槽钢的：

$$I_{z1} = 1369.9cm^3$$

$$S_{z1} = 8.353\times10^4 mm^3$$



所求点的应力：



$$\sigma = \frac{M\times0.04}{2I_{z1}} = \frac{55\times10^3\times40\times10^{-3}}{2\times1369.9\times10^{-8}}$$

$$\approx 80.3MPa$$

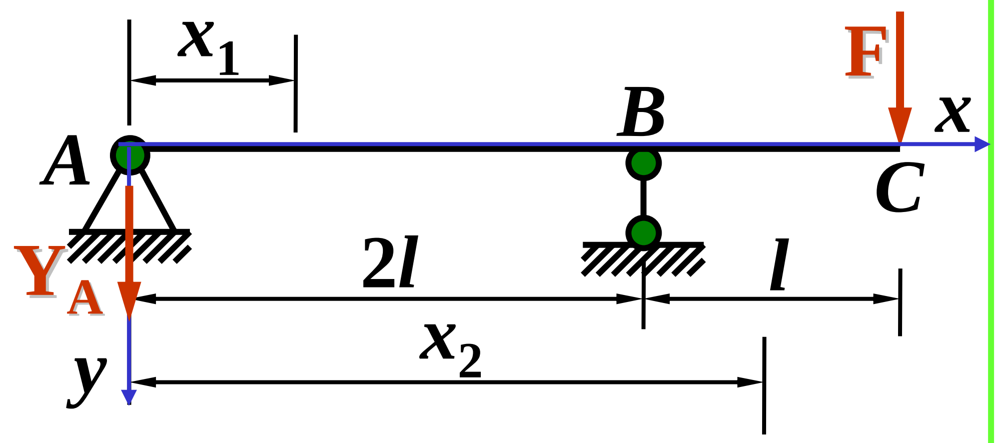
$$\tau = \frac{F_Q\times2S_{z1}}{2dI_{z1}} = \frac{18\times10^3\times8.353\times10^{-5}}{9\times10^{-3}\times1369.9\times10^{-8}}$$

$$\approx 12.2MPa$$

习6-20（a）用积分法求w_C、θ_C。EI=常数

解：支反力：$R_A=F/2$

取坐标轴x如图



分段列弯矩方程，得挠曲线微分方程：

AB段：

$$EI_Z\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{F}{2}x_1 \quad (0\le x_1<2l)$$

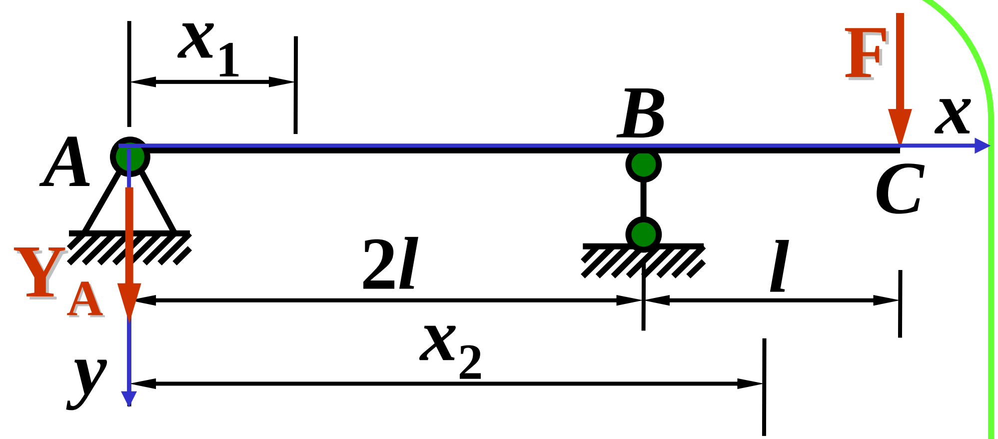
BC段：

$$EI_Z\frac{d^2y}{dx^2}=F(3l-x_2) \quad (2l\le x_2<3l)$$

续习6-20(a)解

$$EI_Z\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{F}{2}x_1$$

$$EI_Z\frac{d^2y}{dx^2}=F(3l-x_2)$$



积分:

$$EI_Z\theta_1=Fx_1^2/4+C_1;\quad EI_Zy_1=Fx_1^3/12+C_1x_1+D_1$$

$$EI_Z\theta_2=-F(3l-x_2)^2/2+C_2;$$

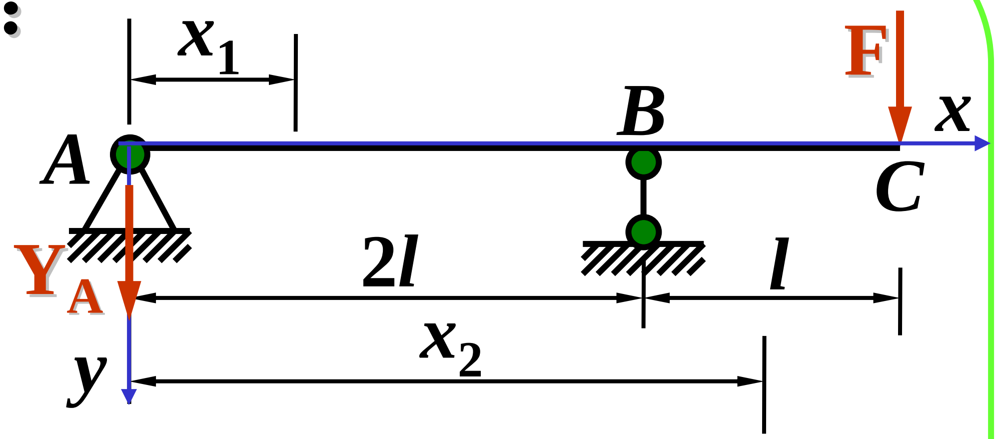
$$EI_Zy_2=-F(3l-x_2)^3/6+C_2(3l-x_2)+D_2$$

确定积分常数: $x_1=0:y_1=0\ \Rightarrow D_1=0$

$x_1=2l:y_1=0\ \Rightarrow C_1=-Fl^2/3$

$x_2=2l:y_2=0$、$\theta_1=\theta_2\ \Rightarrow C_2=7Fl^2/6;D_2=Fl^3;$

各段挠曲线微分方程：



$$\begin{cases} \theta_1 = \dfrac{Fx_1^2}{4EI_z} - \dfrac{Fl^2}{3EI_z}; \\ y_1 = \dfrac{Fx_1^3}{12EI_z} - \dfrac{Fl^2x_1}{3EI_z} \end{cases}$$

$$\left(0 \le x_1 < 2l\right)$$

$$\begin{cases} \theta_2 = -\dfrac{F\left(3l - x_2\right)^2}{2EI_z} + \dfrac{7Fl^2}{6EI_z} \\ y_2 = -\dfrac{F\left(3l - x_2\right)^3}{6EI_z} + \dfrac{7Fl^2\left(3l - x_2\right)}{6EI_z} + \dfrac{Fl^3}{EI_z} \end{cases}$$

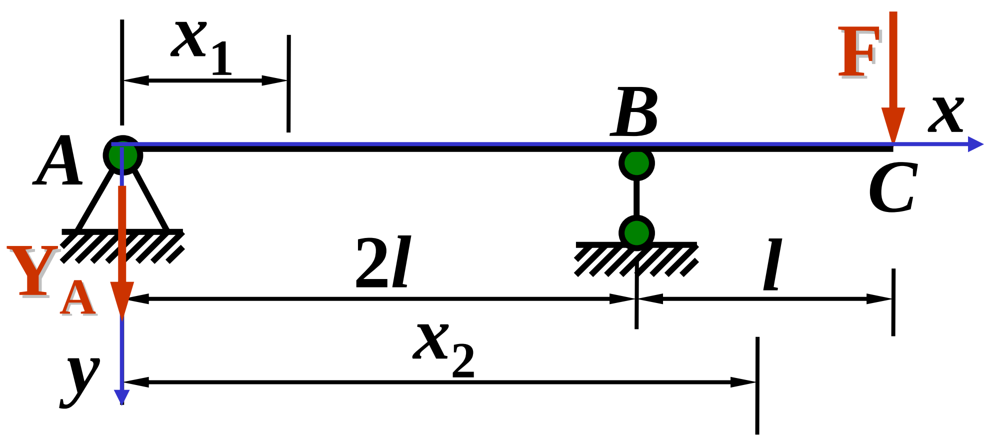
$$\left(2l \le x_2 < 3l\right)$$

$$\begin{cases} \theta_2 = -\dfrac{F(3l - x_2)^2}{2EI_Z} + \dfrac{7Fl^2}{6EI_Z} \\ y_2 = -\dfrac{F(3l - x_2)^3}{6EI_Z} + \dfrac{7Fl^2(3l - x_2)}{6EI_Z} + \dfrac{Fl^3}{EI_Z} \end{cases}$$

C处的挠度和转角：

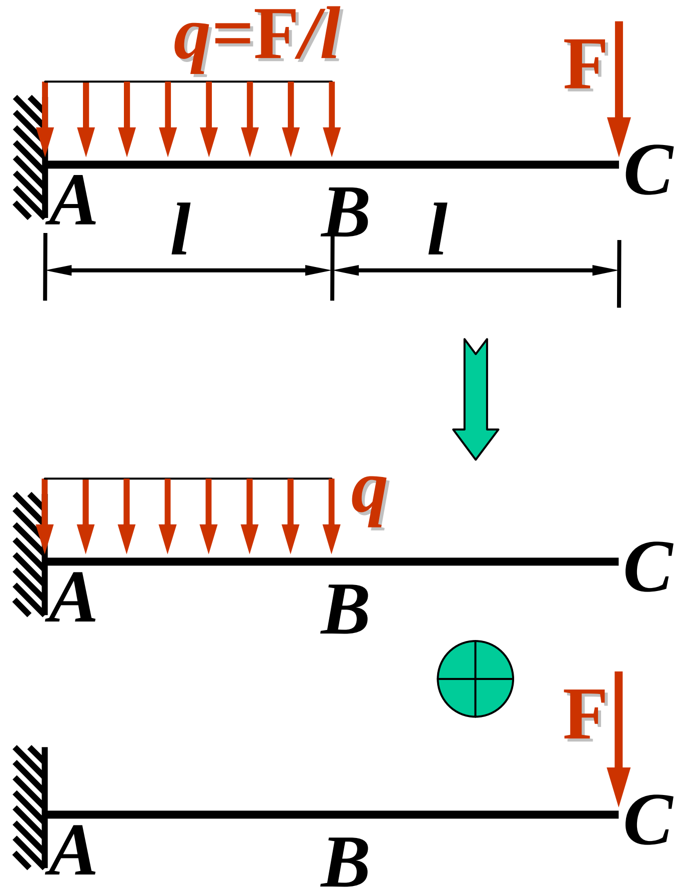
令$x_2=3l$：得

$$\begin{cases} \theta_C = \theta_2 = \dfrac{7Fl^2}{6EI_Z} \\ w_C = y_2 = \dfrac{Fl^3}{EI_Z} \end{cases}$$



习6-22（a）用迭加法求w_C、θ_C。EI=常数

解：将荷载分组,如图



$$\theta_{Bq}=\frac{ql^3}{6EI};y_{Bq}=\frac{ql^4}{8EI}$$

$$y_{Cq}=y_{Bq}+l\theta_{Bq}=7ql^3/(24EI);$$

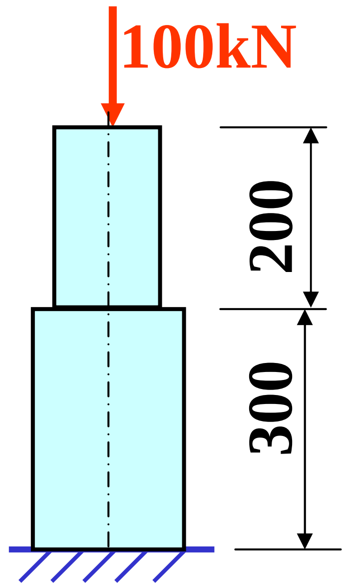
$$\theta_{CF}=\frac{F(2l)^2}{2EI};y_{CF}=\frac{F(2l)^3}{3EI}$$

$$\theta_C=\theta_{Bq}+\theta_{CF}=\frac{13Fl^2}{6EI};$$

$$w_C=y_{Cq}+y_{CF}=\frac{71Fl^3}{24EI}$$

习7-2 已知砼的堆密度 γ =2220kN/m³，[σ] =2MPa。求上段、下段所需的横截面面积。

解： 上段、下段的最大轴力



$$N_1 = -100 - 0.2A_1\gamma(kN)$$
$$N_2 = -100 - 0.2A_1\gamma - 0.3A_2\gamma(kN)$$

强度条件：

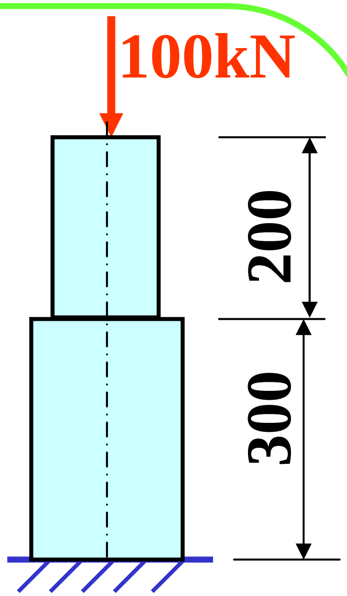
$$A \geq N/[\sigma]$$

$$A_1 \geq \frac{|N_1|}{[\sigma]} = \frac{(100 + 0.2 \times 2220A_1) \times 10^3}{2 \times 10^6}$$

$$A_2 \geq \frac{|N_2|}{[\sigma]} = \frac{100 \times 10^3 + (0.2A_1 + 0.3A_2) \times 222 \times 10^4}{2 \times 10^6}$$

$$A_1 \geq \frac{\left(100+0.2\times 2220A_1\right)\times 10^3}{2\times 10^6}$$

$$A_2 \geq \frac{100\times 10^3+\left(0.2A_1+0.3A_2\right)\times 222\times 10^4}{2\times 10^6}$$

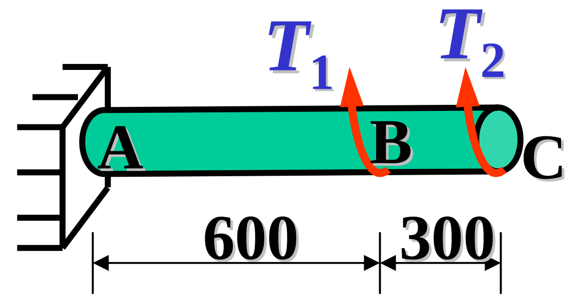


解得上段、下段所需的横截面面积:

$$A_1 \geq 0.0643m^2$$

$$A_2 \geq 0.0964m^2$$

习7-5: 实心钢轴，直径d=100mm，受外力偶矩T_1、T_2作用，$[\tau]=80MPa$，在0.9m长度内的许可扭转角 $[\varphi]=0.014rad$，G=80GPa，试求T_1、T_2的值。



解：BC、AB段的扭矩分别为：

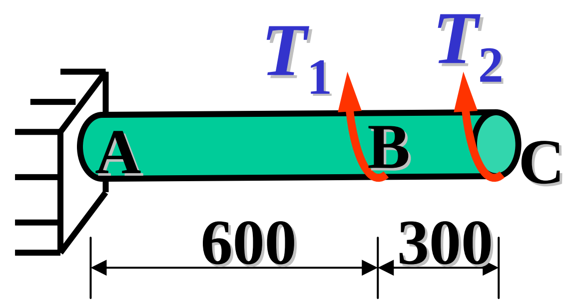
$$T_{BC}=-T_1,\ T_{AB}=-T_1-T_2,$$

截面几何特性：$W_p=\pi 0.1^3/16,\ I_p=\pi 0.1^4/32,$

强度条件：$\tau_{max}=\dfrac{\left|-T_1-T_2\right|}{W_p}\le[\tau],$

续习7-5解

$[\tau] = 80MPa \quad [\varphi] = 0.014rad$



$W_p = \pi 0.1^3/16,\ I_p = \pi 0.1^4/32,$

$$\tau_{max} = \frac{T_1 + T_2}{W_p} \le [\tau],$$

刚度条件：$$\varphi = \frac{0.3T_1 + 0.6(T_1 + T_2)}{GI_p} \le [\varphi],$$

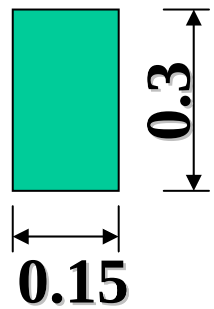
解得：$$T_1 = 10\pi/6 = 5.23(kN \cdot m),$$
$$T_2 = 10\pi/3 = 10.47(kN \cdot m),$$

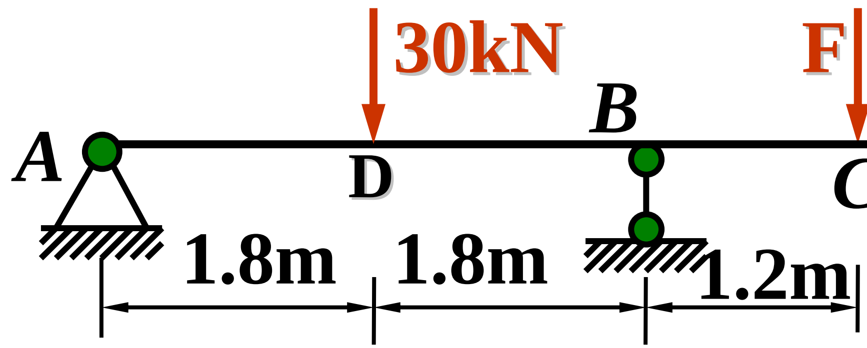
习7-6: 梁的许用应力 $[\sigma] = 8.5MPa$

单独受30kN的荷时梁的强度不够，为使梁满足强度在求，试求C点力F的值。

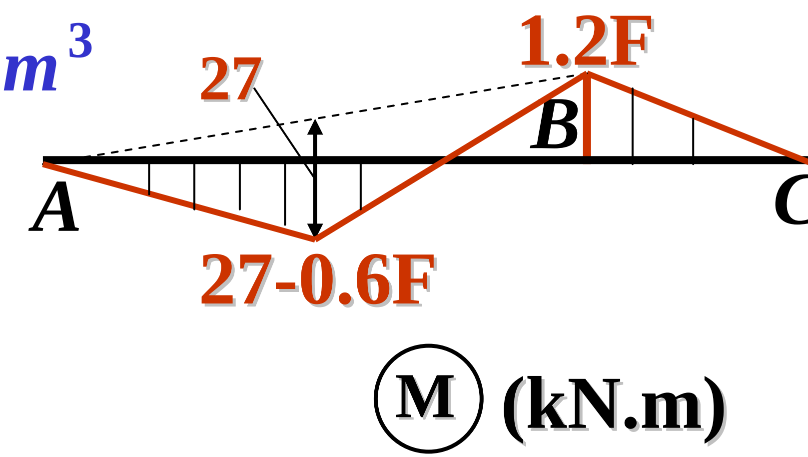
解:

作梁的M图





$$W_z = \frac{0.15 \times 0.3^2}{6} = 2.25 \times 10^{-3} m^3$$



按M_D设计:

$$\sigma_{max} = \frac{27 - 0.6F}{W_z} \times 10^3 \le [\sigma],$$

$$[\sigma]=8.5MPa \qquad W_z=2.25\times10^{-3}m^3$$

$$\sigma_{max}=\frac{27-0.6F}{W_z}\times10^3\le[\sigma],$$

$$F\le\frac{27\times10^3 - W_z[\sigma]}{0.6\times10^3}$$

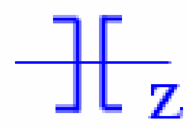
$$=\frac{27\times10^3 - 2.25\times10^{-3}\times8.5\times10^6}{0.6\times10^3}=13.1kN$$

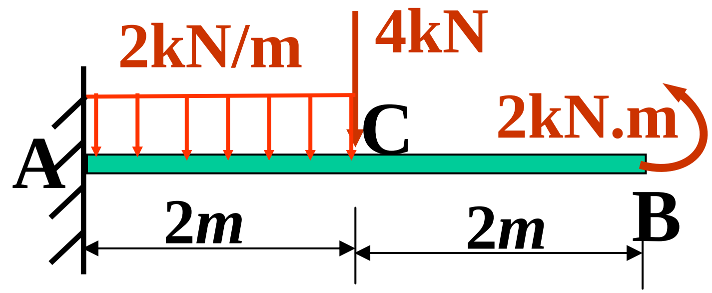
按M_B设计：

$$F\le\frac{W_z[\sigma]}{1.2}=\frac{2.25\times10^{-3}\times8.5\times10^6}{1.2}=15.94kN$$

综合考虑，取 $F\le13.1kN$

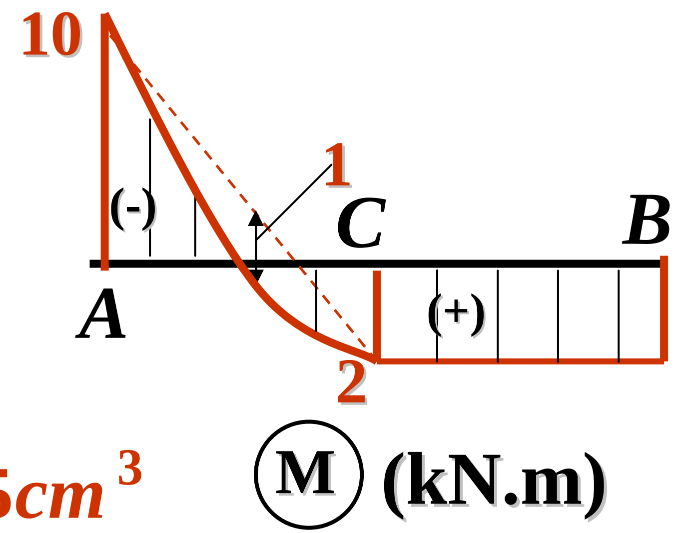
习7-10: 梁的许用应力[σ]=160MPa,许用挠度[w]=*l*/400，E=200GPa，截面为两根槽钢组成，试选槽钢型号。





解:

作梁的M图



1) 按强度条件设计

$$\sigma_{\max} = \frac{10 \times 10^3}{W_z} \le [\sigma]$$

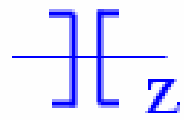
$$W_z \ge \frac{10 \times 10^3}{[\sigma]} = \frac{10^4}{16 \times 10^7} = 62.5cm^3$$

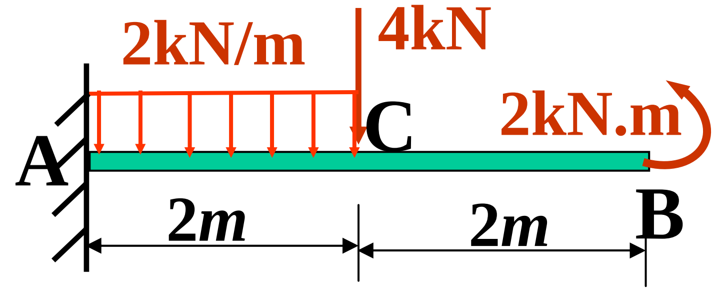
[w]=l/400，E=200GPa，试选槽钢型号。

$$W_z \geq 62.5cm^3$$

每个槽钢所需的：

$$W_{z1} \geq 31.3cm^3$$





查表：初选两根10号槽钢,

其 $W_z = 2 \times 39.7cm^3$

2) 按刚度条件设计

先按迭加法求挠度：

将荷载分组，如图示

续习7-10解

$[w]=l/400$，$E=200GPa$，

查表求最大挠度：

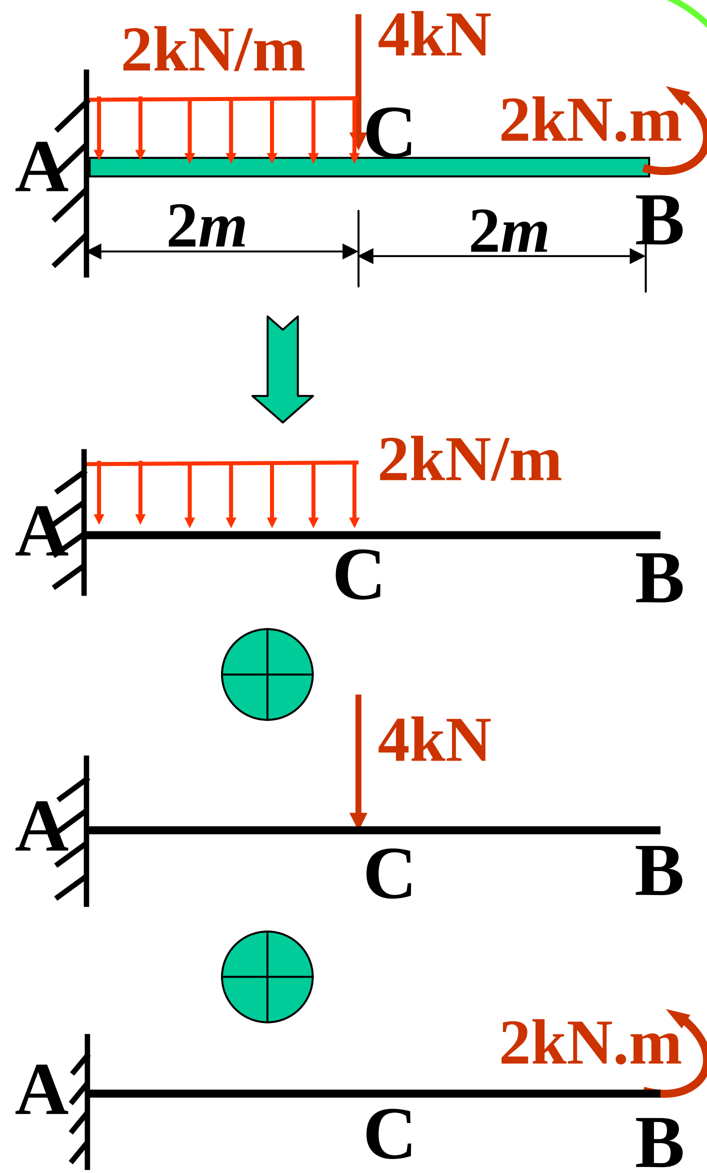
$$y_{Bq}=\left(\frac{2\times2^4}{8EI}+2\times\frac{2\times2^3}{6EI}\right)\times10^3=\frac{28\times10^3}{3EI}$$

$$y_{BF}=\left(\frac{4\times2^3}{3EI}+2\times\frac{4\times2^2}{2EI}\right)\times10^3=\frac{8\times10^4}{3EI}$$

$$y_{BM}=-\frac{2\times4^2}{2EI}\times10^3=-\frac{16\times10^3}{EI}$$

$$y_B=y_{Bq}+y_{BF}+y_{BM}\le[w]$$

即 $$\frac{2\times10^4}{EI}\le\frac{4}{400}\Rightarrow I\ge10^{-5}m^4$$



由W_z初选两根10号槽钢,

$$I_z \geq 10^{-5} m^4$$

一个槽钢所需的 $I_{z1}=500cm^4$

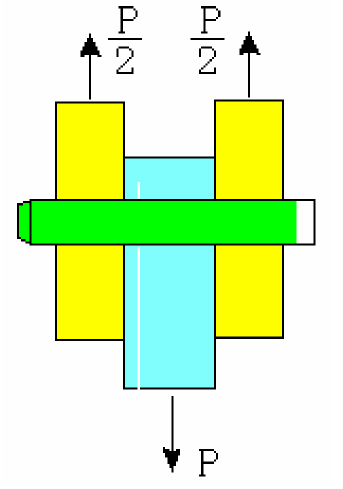
由I查表：初选两根14*a*号槽钢,

其

$$I_z = 2 \times 563.7 cm^3$$

综合考虑，此梁应选两根14*a*号槽钢。

习7-12: 试校核销钉的剪切强度。已知F＝120kN，销钉直径d=30mm，材料的[τ]=70 MPa,，若强度不够，改选直径d=?。



解: 销钉双剪

每个剪切面的剪力

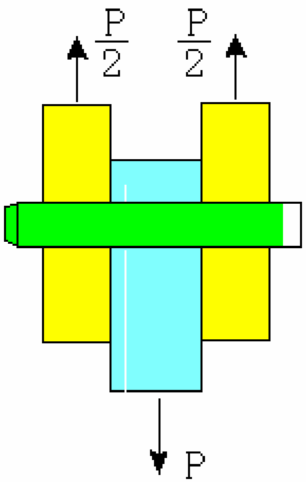
Q=P/2=60kN

$$\tau = \frac{Q}{A_s} = \frac{6\times 10^4}{\pi \times 3^2 \times 10^{-4} / 4} \approx 84.9 MPa > [\tau] = 70 MPa$$

强度不够。

改选直径

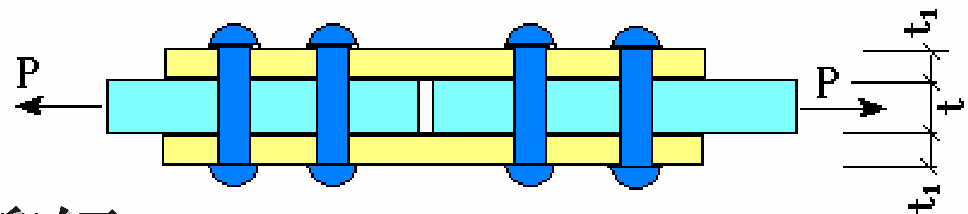
$$d \geq \sqrt{\frac{4Q}{\pi[\sigma]}} = \sqrt{\frac{4\times 6\times 10^{4}}{7\pi\times 10^{7}}}$$



$$d \geq 33.04\times 10^{-3} m \approx 33mm$$

改用直径 d=33mmr的销钉。

习7-14: 图示接头，板厚t=10mm，上、下盖板厚t_1=6mm，材料的，[τ]=100MPa，[σ_{bs}]=280MPa，P=200kN。试问共需要多少个直径d=17mm的铆钉。



解: 销钉双剪

设一块拉板上要n个铆钉

每个剪切面的剪力 $Q = P/2n = 100kN/n$

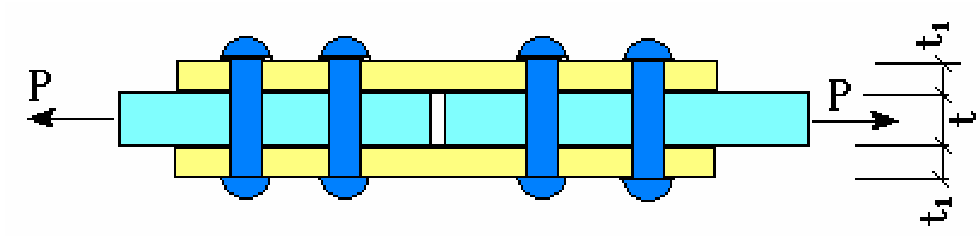
由剪切强度计算:

$$\frac{Q}{nA_s} \le [\tau] \Rightarrow n \ge \frac{4\times10^5}{\pi\times17^2\times10^{-6}\times10^8} = 4.4$$

一块拉板上要5个铆钉。

习7-14: t=10mm，t_1=6mm， [τ]=100MPa，[σ $_{bs}$]=280MPa,。 d=17mm试问共需要多少个铆钉。

挤压剪力P_{bs}=P/n



由挤压强度计算:

$$\frac{P_{bs}}{nA_{bs}} \le [\sigma_{bs}] \Rightarrow n \ge \frac{2\times 10^5}{17\times 10^{-5}\times 28\times 10^7} = 4.2$$

一块拉板上要5个铆钉。

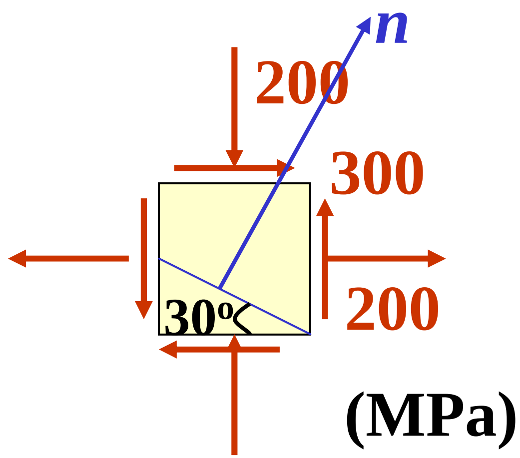
综合考虑，一块拉板上至少需要5个铆钉，总共至少需要10个铆钉。

8－1(b)计算图示单元体指定斜截面上的应力

解：1)由已知条件知

$$\sigma_x = 200, \sigma_y = -200\,MPa$$

$$\tau_x = 300\text{MPa}, \alpha = 60^\circ$$



2）计算σ_{60°，τ_{60°：

$$\sigma_{60^0} = \frac{200-200}{2} + \frac{200+200}{2}\cos 120^o + 300\sin 120^o$$

$$\approx 159.8(\text{MPa})$$

$$\tau_{30^0} = \frac{200+200}{2}\sin 120^o - 300\cos 120^o$$

$$\approx 323.2(\text{MPa})$$

8—4 已知平面应力状态的 $\sigma_x = 120, \sigma_y = 40MPa$

又知其中两个主应力=0，求另一个主应力和 τ_x

解：1) 由公式：$\sigma_{max} + \sigma_{min} = \sigma_x + \sigma_y$

$$\sigma_{\substack{max\\min}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_x^2}$$

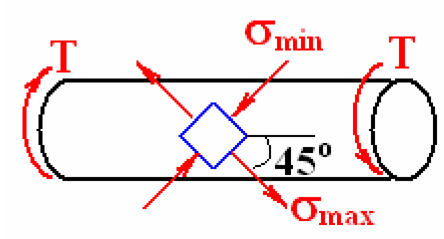
$\Rightarrow$ $\sigma_{max} + 0 = 160MPa$

$$\sigma_{\substack{max\\min}} = \frac{160}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{80}{2}\right)^2 + \tau_x^2} \Rightarrow 0 = \frac{160}{2} - \sqrt{\left(\frac{80}{2}\right)^2 + \tau_x^2}$$

$\Rightarrow$ $\tau_x = \sqrt{4800} \approx \pm 69.3MPa$

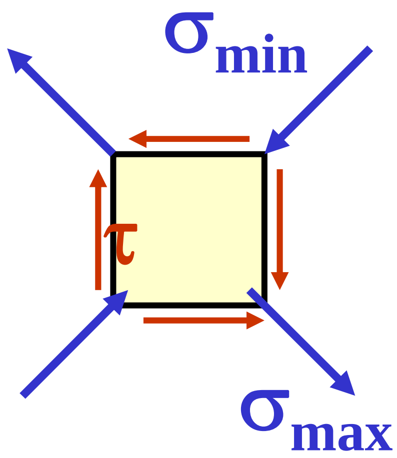
$\sigma_{max} = 160MPa$

习8-8 已知轴的直径d=320mm，测得45°方向的 $\sigma_{\max} = 89\ MPa$，求轴的扭矩T。



解：$W_p = \dfrac{\pi d^3}{16}, \tau_x = \dfrac{T}{W_p},$

应力单元体如图示。



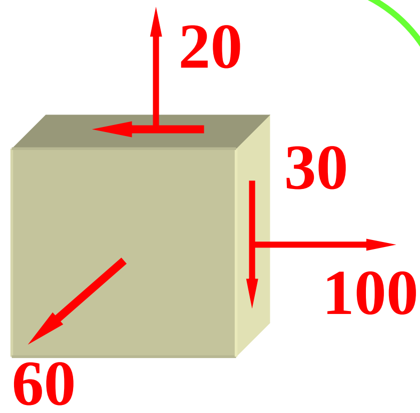
$$\sigma_{\max} = \tau_x = T/W_p,$$

$$T = \sigma_{\max} W_p = \sigma_{\max} \pi d^3/16,$$

$$= 89 \times 10^6 \pi \times 0.32^3/16$$

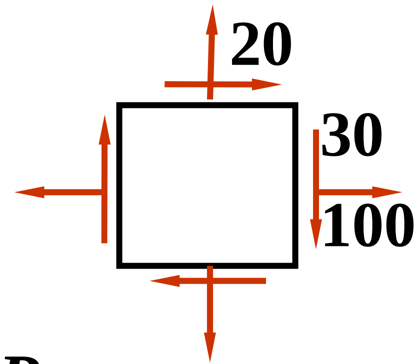
$$\approx 572.6 \times 10^3 (N \cdot m)$$

习8-9 (a) 应力状态如图示。求主应力和最大切应力。



解:

这里已知一个主应力为 60MPa，利用平面应力状态分析方法求另外两个主应力。如图示:



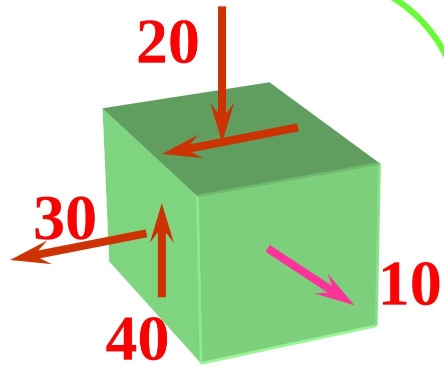
$$\sigma_x = 100, \sigma_y = 20, \tau_{xy} = 30MPa$$

$$\left.\begin{matrix}\sigma_{max}\\ \sigma_{min}\end{matrix}\right\} = \frac{100+20}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{100-20}{2}\right)^2 + 30^2} = \begin{cases}110MPa\\ 10MPa\end{cases}$$

$$\therefore \quad \sigma_1 = 110, \sigma_2 = 60, \sigma_3 = 10MPa$$

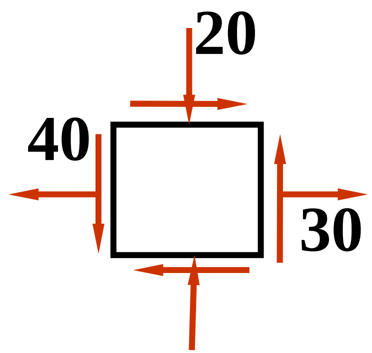
$$\tau_{max} = (\sigma_1 - \sigma_3)/2 = 50MPa$$

习8-9 (b) 应力状态如图示。求主应力和最大切应力。



解:

这里已知一个主应力为 10MPa，利用平面应力状态分析方法求另外两个主应力。如图示:



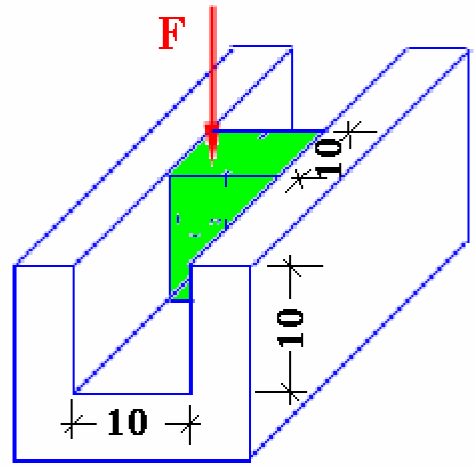
$$\sigma_x = 30, \sigma_y = -20, \tau_{xy} = -40MPa,$$

$$\begin{matrix}\sigma_{max} \\ \sigma_{min}\end{matrix} = \frac{30-20}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{30+20}{2}\right)^2 + 40^2} = \begin{cases} 52.2MPa \\ -42.2MPa \end{cases}$$

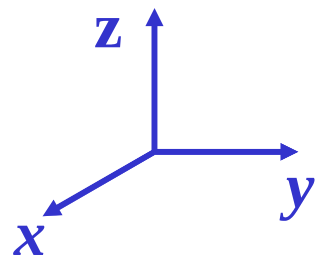
$$\therefore \quad \sigma_1 = 52.2, \sigma_2 = 10, \sigma_3 = -42.2MPa$$

$$\tau_{max} = (\sigma_1 - \sigma_3)/2 = 47.2MPa$$

习8-13: 边长为为10mm的铝立方块，放在宽度为10mm的刚性槽内。已知铝的泊松比 ν =0.33,竖直向下的力F＝6kN，试求铝块的三个主应力。



解：取坐标系如图示，



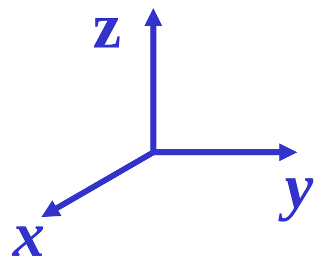
已知条件有：

$$\varepsilon_y = 0, \sigma_x = 0, \sigma_z = -\frac{F}{A} = -60MPa,$$

由
$$\begin{cases} E\varepsilon_x = \sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z) \\ E\varepsilon_y = \sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x) \\ E\varepsilon_z = \sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y) \end{cases}$$

续习8-13解

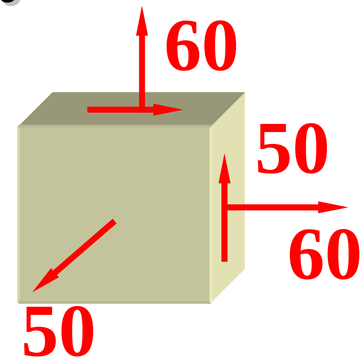
$$\varepsilon_y = 0, \sigma_x = 0, \sigma_z = -60MPa,$$



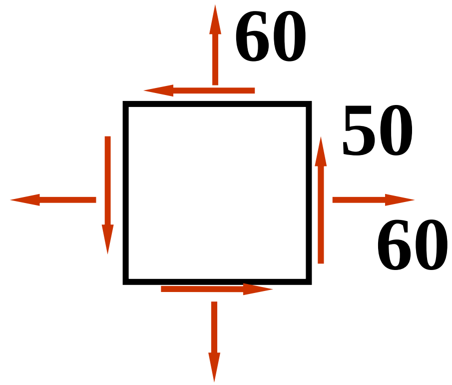
$$\begin{cases} \sigma_y = \nu\sigma_z = -19.8MPa \\ \varepsilon_x = -\dfrac{1+\nu}{E}\sigma_y = 3.762\times10^{-4} \\ \varepsilon_z = \dfrac{1-\nu^2}{E}\sigma_z = -7.638\times10^{-4} \end{cases}$$

$$\therefore \quad \sigma_1 = 0, \sigma_2 = -19.8, \sigma_3 = -60MPa$$

习8-17已知危险点的 应力状态如图示。[σ]=160MPa，试按第三强度理论校核强度。



解：已知一个 σ = 50MPa，利用平面应力状态分析方法求另外两个主应力。如图示：



$$\sigma_x = 60, \sigma_y = 60, \tau_{xy} = -50MPa$$

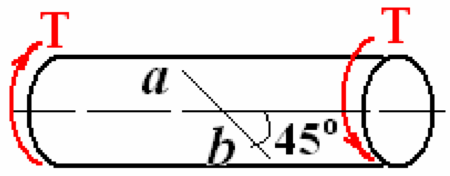
$$\left.\begin{matrix}\sigma_{max}\\ \sigma_{min}\end{matrix}\right\} = \frac{60+60}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{60-60}{2}\right)^2 + 50^2}$$

$$\sigma_{max} 110MPa, \quad \sigma_{min} = 10MPa$$

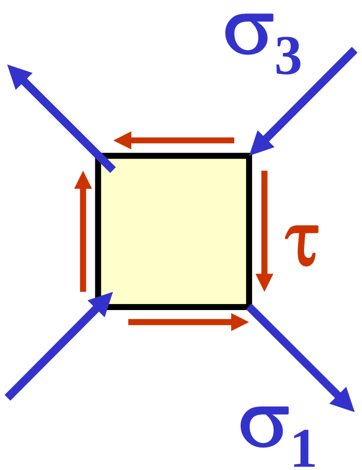
$$\therefore \quad \sigma_1 = 110, \sigma_2 = 50, \sigma_3 = 10MPa$$

$$\sigma_{r3} = (\sigma_1 - \sigma_3) = 100 < [\sigma] = 160MPa$$ 满足。

习8-18 已知轴的直径d=30mm，E=210GPa, ν =0.3，σ_s=240MPa，测得*a*b方向的应变ε＝0.0002。试按第三强度理论设计该轴时的安全因数。



解： *a*b线上中点的应力单元体如图示：



$$\because \quad \sigma_3 = -\sigma_1$$

$$E\varepsilon_1 = \sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)$$

$$\therefore \quad E\varepsilon_1 = \sigma_1(1+\nu)$$

$$\sigma_1 = 21\times10^4 \times 2\times10^{-4} / 1.3 = 32.3MPa$$

续习8-18解

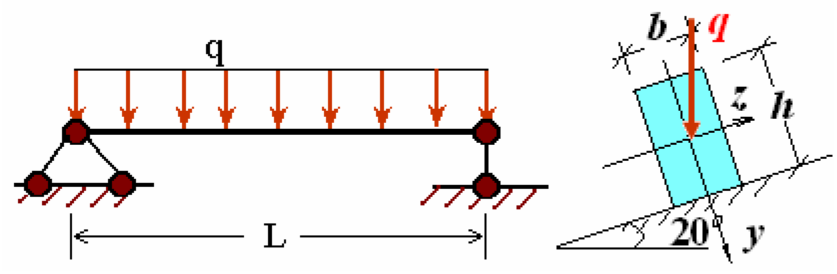
$$\sigma_1 = 32.3, \sigma_3 = -32.3, \sigma_s = 240MPa,$$

三强度理论： $\sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma] = \dfrac{\sigma_s}{n}$

$$n \leq \frac{\sigma_s}{\sigma_1 - \sigma_3} = \frac{240}{32.3 + 32.3} = 3.715$$

习9-1 矩形截面梁受载如图所示。 已知α =30°，q=1.6kN/m，L=4m，h=160mm，b=110mm；许用应力[σ]＝10MPa。试校核梁的强度。

解：(1) 属斜弯曲，危险面—跨中。



（2）M_{max}：

$$M_{y\max} = q\sin\theta L^2/8 = 1.094kN\cdot m,$$

$$M_{z\max} = q\cos\theta L^2/8 = 3.007kN\cdot m,$$

（3）截面几何特征： $W_z = \dfrac{bh^2}{6} = 469.3,\quad W_y = 322.7cm^3$

（4）强度计算

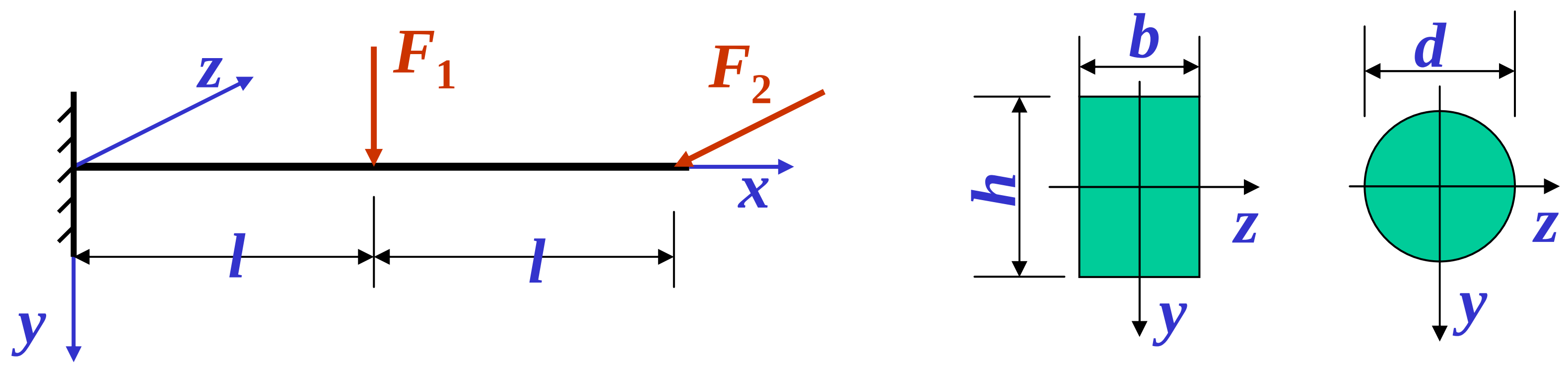
$$\sigma_{\max} = \frac{M_{y\max}}{W_y} + \frac{M_{z\max}}{W_z} \approx 9.8MPa < [\sigma] = 10MPa,$$

强度满足要求。

习9-2: 悬臂梁如图示， l=1m， F_1=800N， F_2=1600N，试求以下两种情况下，梁的最大正应力并指出作用位置。

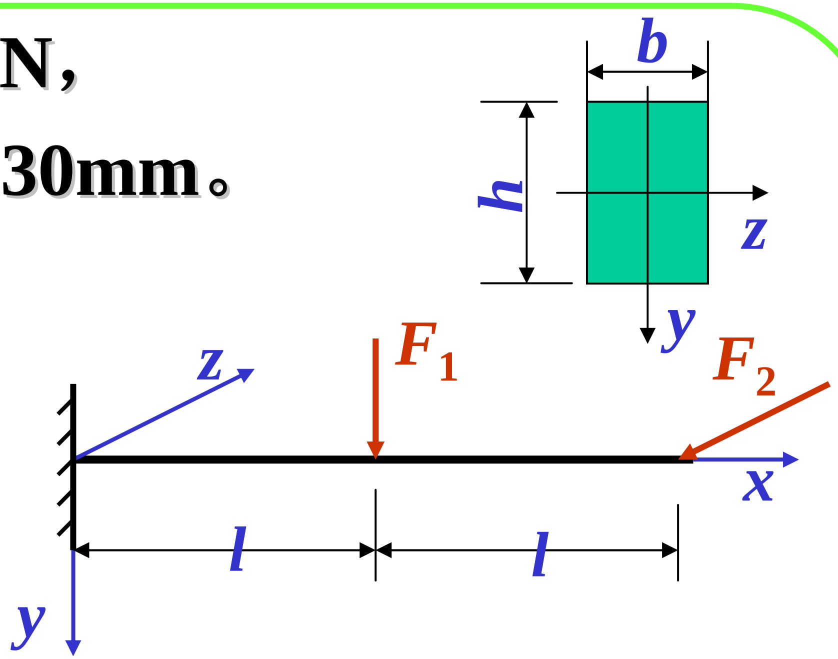
1) b=90mm、h=180mm的矩形截面；

2) 直径d=130mm的圆形截面。



l=1m， F_1=800N，F_2=1600N，

b=90mm、h=180mm；d=130mm。



解：

(1)　属斜弯曲，

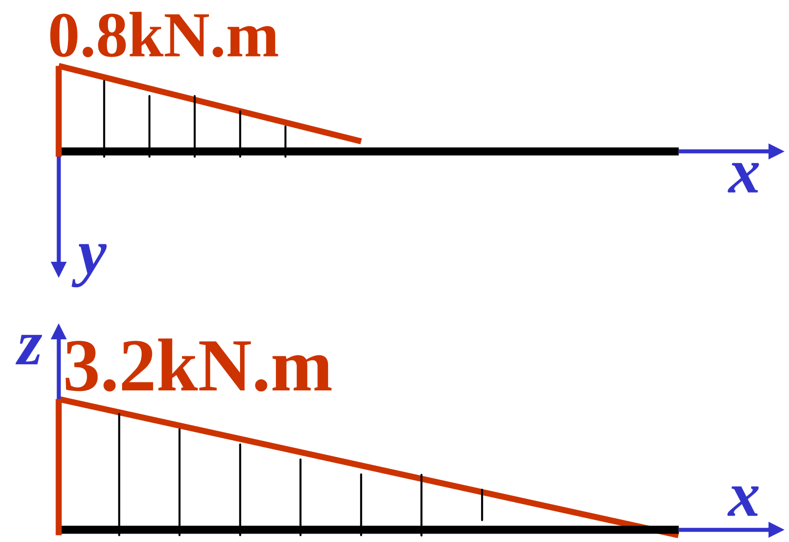
危险面—固定端。

（2）M_{max}：

$$M_{z\max} = 0.8kN \cdot m,$$

$$M_{y\max} = 3.2kN \cdot m$$

（3）最大正应力计算



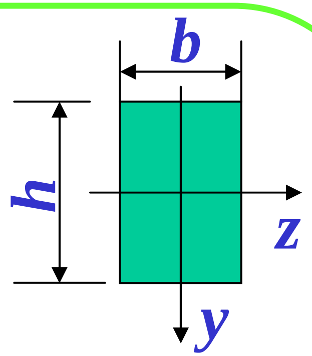
矩形截面：

$$W_z = bh^2/6 = 486,$$

$$W_y = hb^2/6 = 243cm^3$$

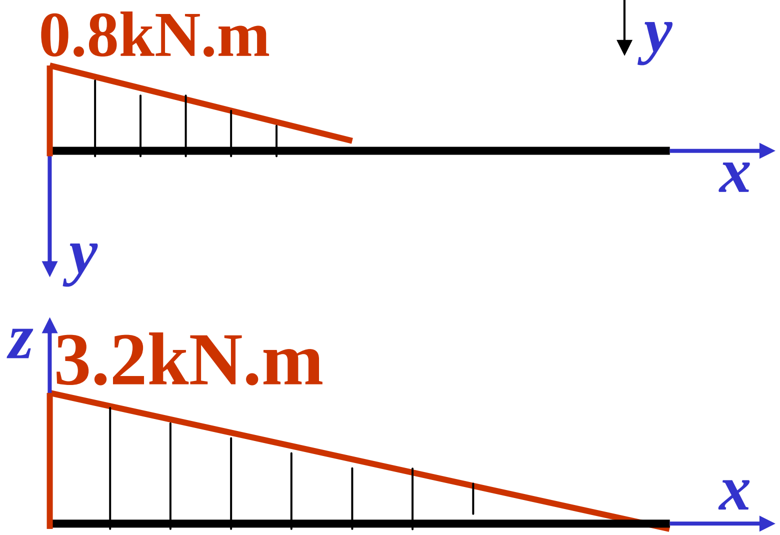
$$M_{z\max} = 0.8kN \cdot m, \quad W_z = bh^2/6 = 486,$$

$$M_{y\max} = 3.2kN \cdot m \quad W_y = hb^2/6 = 243cm^3$$



$$\sigma_{\max} = \frac{M_{y\max}}{W_y} + \frac{M_{z\max}}{W_z}$$

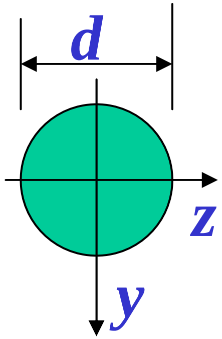
$$= \left(\frac{3200}{243} + \frac{800}{486}\right) \times 10^6$$



$$\sigma_{\max} \approx 14.8MPa$$

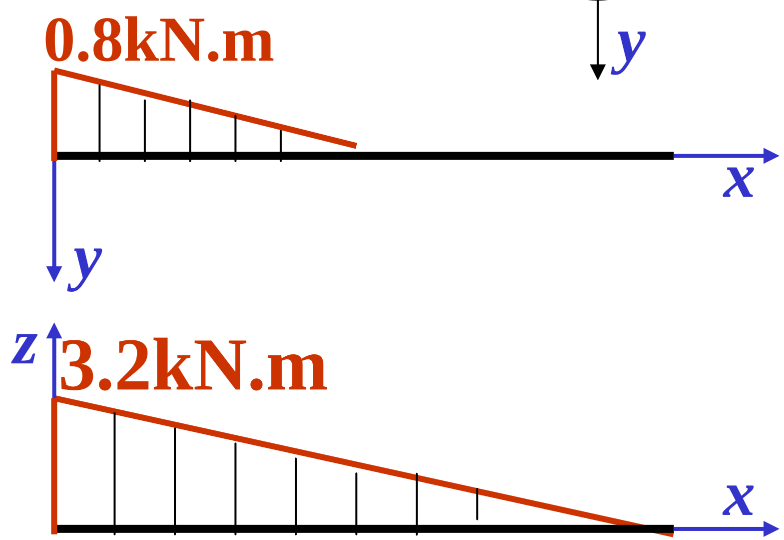
位于固定端右上角。

$$M_{z\max} = 0.8, M_{y\max} = 3.2kN \cdot m, d = 13cm$$



圆形截面：

$$W_z = W_y = \pi d^3/32 \approx 216cm^3$$



固定端的合成矩：

$$\overline{M} = \sqrt{M_y^2 + M_z^2}$$

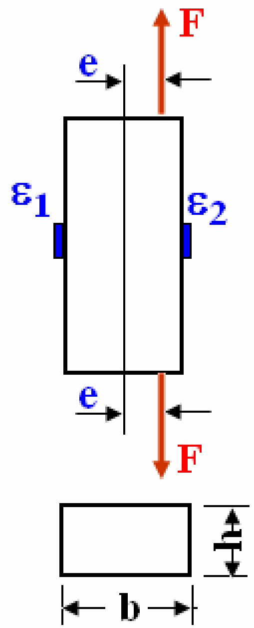
$$= \sqrt{3.2^2 + 0.8^2} \approx 3.3kN.m$$

最大正应力计算

$$\sigma_{\max} = \frac{\overline{M}}{W_z} = \frac{3300}{216 \times 10^{-6}} \approx 15.28MPa$$

习9-6 受偏心拉力的矩形截面杆如图示，测得两偶面的纵向线应变ε_1和ε_1，试证明偏心矩e满足以下关系式。

$$e=\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\cdot\frac{b}{6}$$



解:

1）外内力分析(轴力、弯矩)

$$N=F,\quad M=e\cdot F$$

2）两侧点的应力

$$\sigma_1=\frac{F}{bh}-\frac{6eF}{b^2h};\quad \sigma_2=\frac{F}{bh}+\frac{6eF}{b^2h}$$

3）由胡克定律

$$E\varepsilon_1=\frac{F}{bh}-\frac{6eF}{b^2h};\quad E\varepsilon_2=\frac{F}{bh}+\frac{6eF}{b^2h}$$

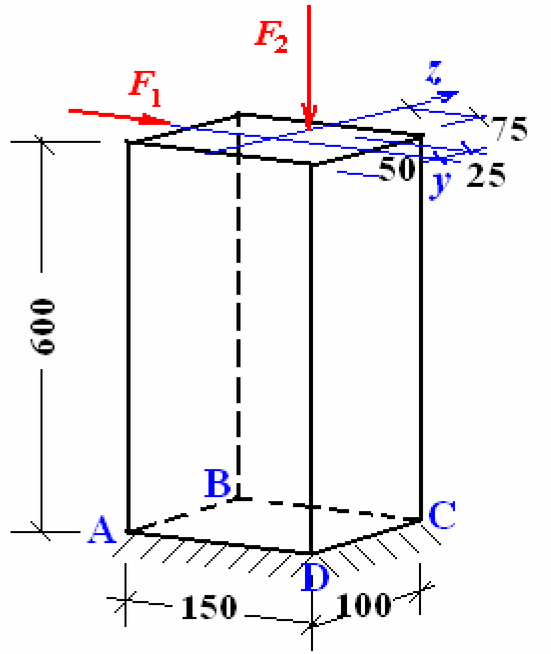
4）两式相加、减:

$$\frac{2F}{bh}=E(\varepsilon_1+\varepsilon_2);\quad \frac{12eF}{b^2h}=E(\varepsilon_2-\varepsilon_1)$$

$$\Rightarrow\quad e=\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\cdot\frac{b}{6}$$

<证毕>

习9-8 短受柱载如图所示。已知F_1=25kN，F_2=5kN。求固定端面角点A、B、C、D的应力。



解：

(1) 属斜弯曲+轴向压缩，
危险面—固定端。

（2）危险面的内力

$$F_N = -F_2 = -5kN$$

$$M_{z\max} = 0.6F_1 = 15kN \cdot m,$$

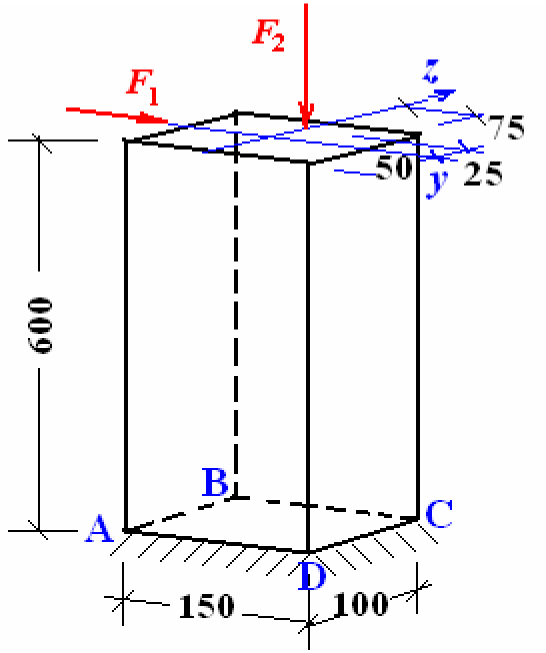
$$M_{y\max} = 0.025F_2 = 125N \cdot m$$

（3）截面几何特性：

$$\begin{cases} A = 150\ cm^2 \\ W_y = hb^2/6 = 250\ cm^3 \\ W_z = bh^2/6 = 375\ cm^3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = 150cm^2 \\ W_y = hb^2/6 = 250cm^3 \\ W_z = bh^2/6 = 375cm^3 \end{cases}$$

$$F_N = -5kN$$
$$M_{z\max} = 15kN \cdot m,$$
$$M_{y\max} = 125N \cdot m$$



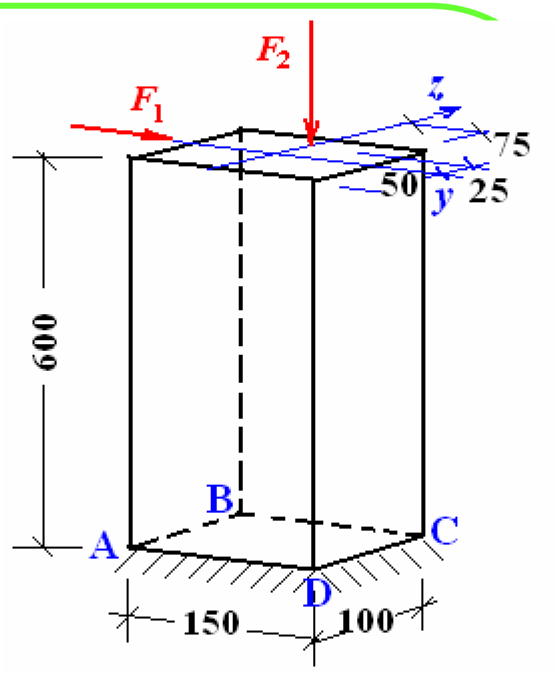
（4）各内力引起的应力

$$\begin{cases} \sigma_N = -5\times10^3/(15\times10^{-3}) = -0.333MPa \\ \sigma_{My} = 125/(25\times10^{-5}) = 0.5MPa \\ \sigma_{Mz} = 15\times10^3/(375\times10^{-6}) = 40MPa \end{cases}$$

（5）A 、 B 、 C 、 D的应力

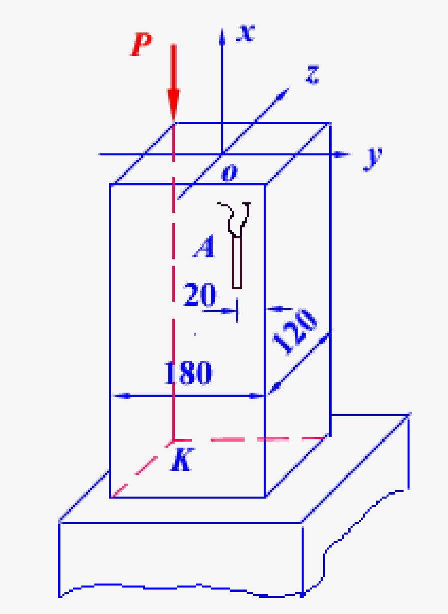
$$\begin{cases} \sigma_A = \sigma_N + \sigma_{Mz} + \sigma_{My}, \sigma_B = \sigma_N + \sigma_{Mz} - \sigma_{My} \\ \sigma_C = \sigma_N - \sigma_{My} - \sigma_{Mz}, \sigma_D = \sigma_N - \sigma_{Mz} + \sigma_{My} \end{cases}$$

$$\sigma_N = -0.333, \sigma_{My} = 0.5, \sigma_{Mz} = 40MPa$$



$$\begin{cases} \sigma_A = \sigma_N + \sigma_{Mz} + \sigma_{My} = 40.167 \\ \sigma_B = \sigma_N + \sigma_{Mz} - \sigma_{My} = 31.167 \\ \sigma_C = \sigma_N - \sigma_{Mz} - \sigma_{My} = -40.833 \\ \sigma_D = \sigma_N - \sigma_{Mz} + \sigma_{My} \approx -39.833MPa \end{cases}$$

习9-9 短柱受力如图示，测得A点纵向线应变 $\varepsilon_A=500\times10^{-6}$，E=10GPa, 试求压力P。



解：1）外内力分析(轴力、弯矩)

$$N=-P \qquad M_y=0.06P \qquad M_z=0.09P$$

2）A点处属单向应力状态

$$\sigma_A=-\frac{N}{A}+\frac{M_y}{W_y}+\frac{M_z\cdot y_A}{I_z}$$

$$=-\frac{P}{0.12\times0.18}+\frac{6\times0.06P}{0.12^2\times0.18}+\frac{12\times0.09\times0.07P}{0.12\times0.18^2}$$

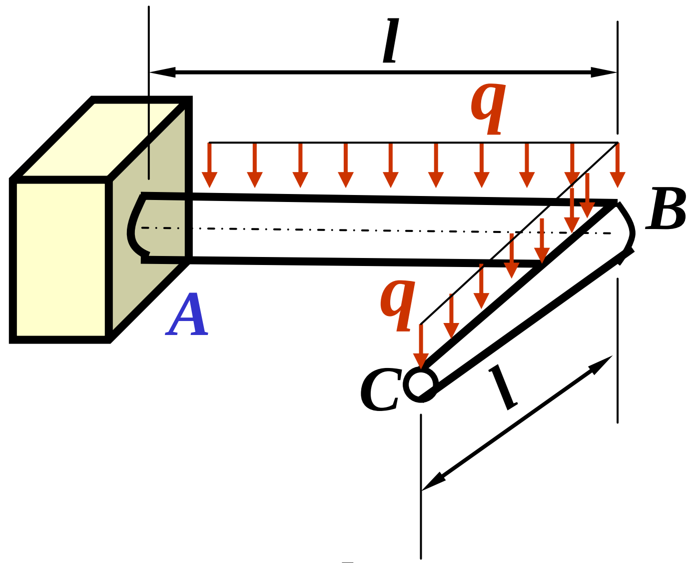
$$\sigma_A=-46.3P+139P+108P$$

$$\approx 200P(Pa)$$

3） $\because\ \varepsilon_A=\sigma_A/E$, ➡ $500\times10^{-6}=\dfrac{200P}{10\times10^9}$,

➡ $P=25(kN)$

习9-15: 图示水平面内等截面直角拐，受竖直向下的均布荷载作用，已知 l=800mm， d=40mm，q=1kN/m，[σ]=170MPa。试按第三强度理论校核曲拐的强度。

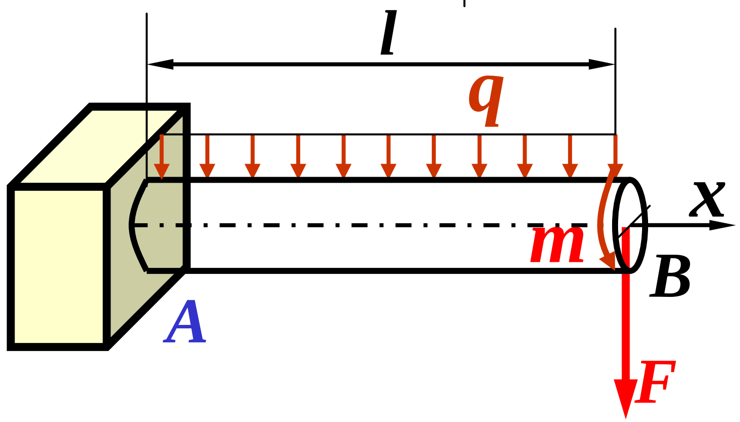


解:

1）将BC上的力向 *AB* 杆右端截面的形心*B*简化得：

$$F = ql = 0.8kN,$$

$$m = ql^2/2 = 0.32kN \cdot m$$



m：引起扭转

F、*q*：引起平面弯曲。

$F = 0.8kN, m = 0.32kN \cdot m$

AB 杆为弯、扭组合变形

2）将荷载分组，

3）画内力图，

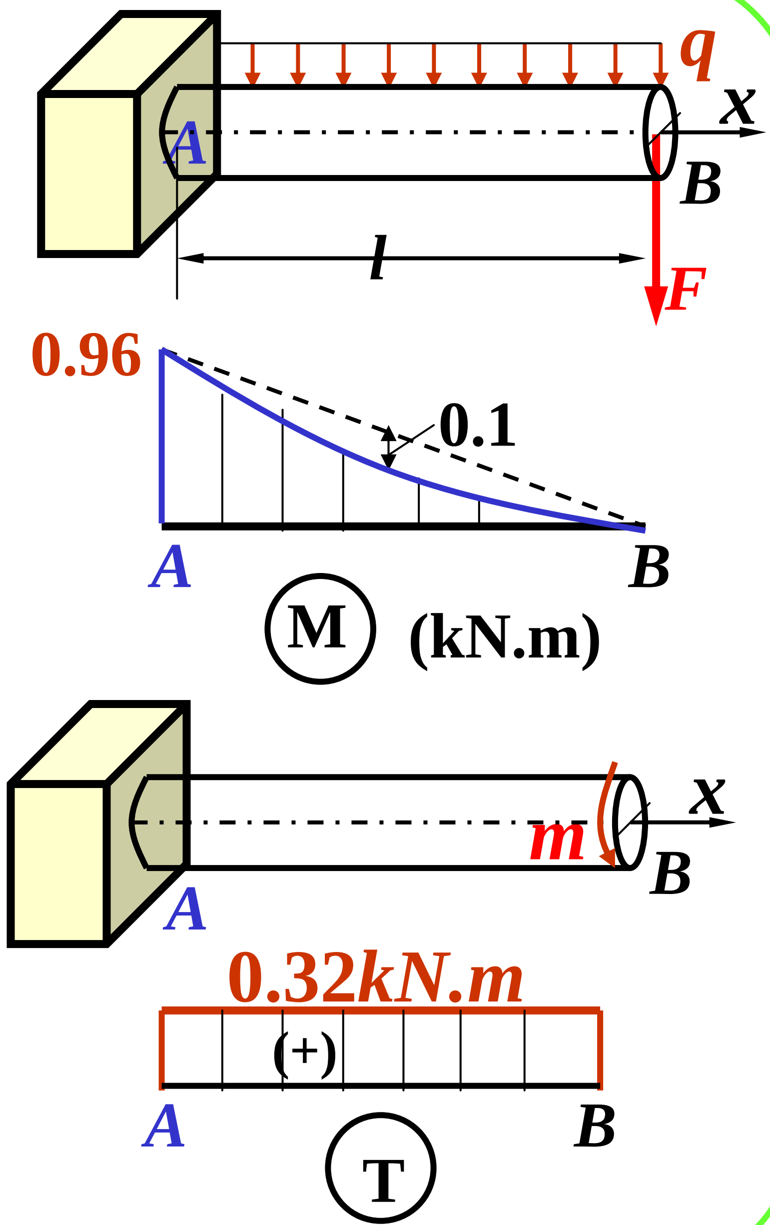
固定端A截面为危险截面.

4）截面几何特性：

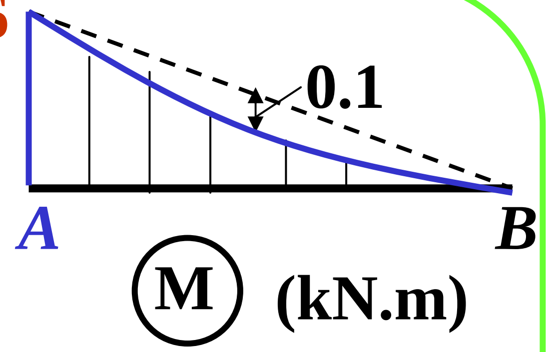
$$W_p = \pi \times \left(4 \times 10^{-2}\right)^3 / 16$$

$$= 4\pi \times 10^{-6} m^3$$

$$W_z = 2\pi \times 10^{-6} m^3$$

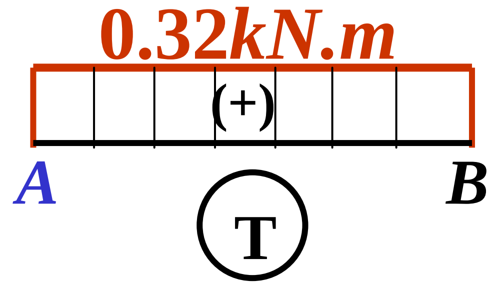


$W_p = 4\pi \times 10^{-6} m^3$;　$W_z = 2\pi \times 10^{-6} m^3$



5）应力分析

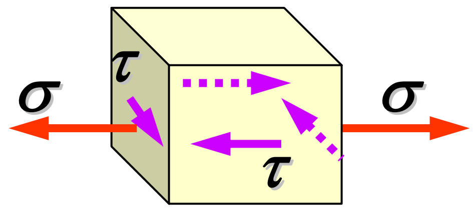
$$\sigma = \frac{M}{W_z} = \frac{960}{2\pi \times 10^{-6}} = 152.79 MPa$$



$$\tau = \frac{M}{W_p} = \frac{320}{4\pi \times 10^{-6}} = 25.1 MPa$$

危险点在A面的上、下边缘点，

处于二向应力状态。



6）第三强度理论计算

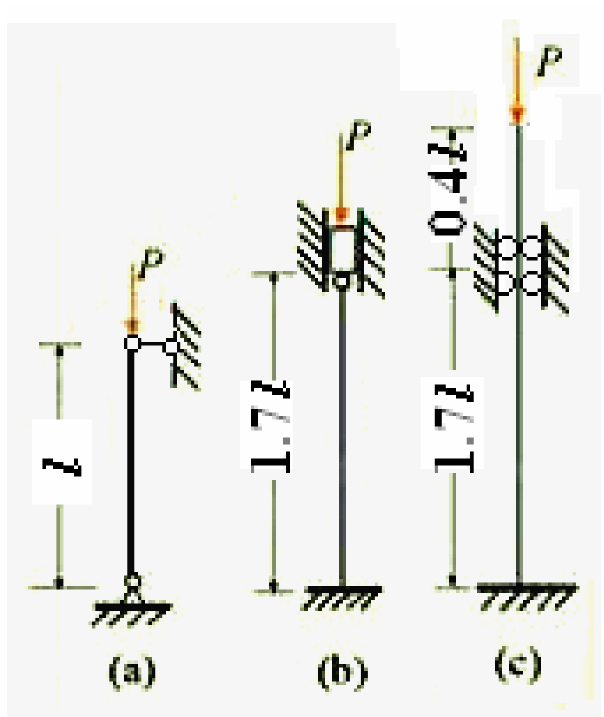
$$\sigma_{r3} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{152.79^2 + 4 \times 25.1^2}$$

$$\approx 160.8 MPa < [\sigma] = 170 MPa$$

【习10-4 】图示各圆形压杆均的直径为d，材料均相同。试问哪杆的F_{cr}最大、哪杆的最小。

解：各杆的i相同，

1）求各杆的柔度：



$$\lambda_a = l/i$$

$$\lambda_b = \frac{0.7 \times 1.7l}{i} = \frac{1.19l}{i}$$

$$\lambda_{c上} = \frac{2 \times 0.4l}{i} = \frac{0.8l}{i}$$

$$\lambda_{c下} = \frac{0.5 \times 1.7l}{i} = \frac{3.4l}{i}$$

$$\lambda_a = l/i\,,\quad \lambda_b = 1.19\,l/i\,,$$

$$\lambda_{c上} = 0.8l/i\,,\quad \lambda_{c下} = 3.4l/i\,,$$

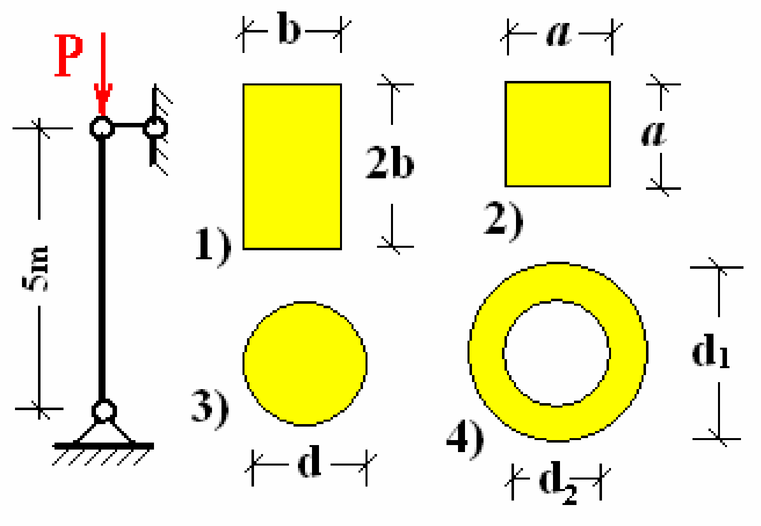
2）比较最大、最小临界力：

$$\lambda_{c下} > \lambda_b > \lambda_a > \lambda_{c上}$$

$$\therefore\quad (F_{cr})_{c下} > (F_{cr})_b > (F_{cr})_a > (F_{cr})_{c上}$$

即图(c) 下段的Fcr最小、图(c) 上段的Fcr最大。

习10-5 两端铰支压杆，材料为Q235钢，图示四种截面形状，截面面积均为4.0×10³mm²，试比较它们的Fcr，设$d_2=0.7d_1$。



解： 1）各杆的i，

(1) $b^2=2\times10^3mm^2$

$$i_1^2=\frac{2b^4}{12\times2b^2}=\frac{b^2}{12}$$

(2) $a^2=4\times10^3mm^2;\qquad i_2^2=a^2/12$

(3) $d^2=16\times10^3mm^2/\pi;\qquad i_3^2=d^2/16$

(4) $d_1^2=\dfrac{4A}{\pi(1-\alpha^2)};\qquad i_4^2=d_1^2(1+\alpha^2)/16$

2）求各杆的柔度：

$\lambda_1 = l/i_1 \approx 387.3$ ；$\lambda_2 = l/i_2 \approx 273.86$;

$\lambda_3 = l/i_3 \approx 280.2$; $\lambda_4 = l/i_4 \approx 164 > \lambda_c = 123$

各杆细长杆。

临界压力：$$F_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \cdot A$$

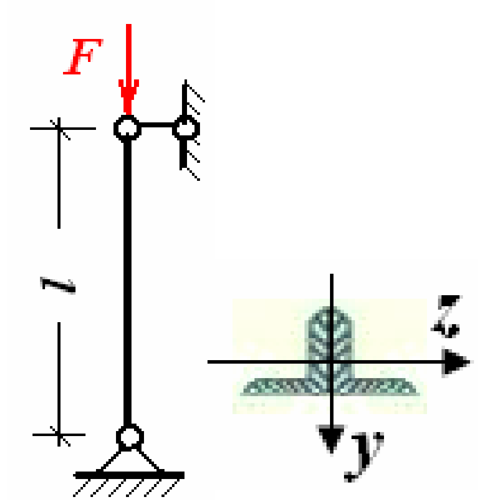
各杆临界压力之比：

矩形：圆形：正方形：空心圆＝

$$\frac{1}{\lambda_1^2} : \frac{1}{\lambda_3^2} : \frac{1}{\lambda_2^2} : \frac{1}{\lambda_4^2} = \frac{1}{387.3^2} : \frac{1}{280.2^2} : \frac{1}{273.86^2} : \frac{1}{164^2}$$

$$= 1 : 1.91 : 2.0 : 5.57$$

【习10-7】长度l=3.4m的两端铰支压杆，由两根75×75×5 的等边角钢焊接而成，形状如图示，属b类截面，材料为Q235钢， $[\sigma]=160MPa$ 。问此杆在F=60kN 作用是否安全?



解:

查得一根角钢截面几何特性:

$$A_1=7.367cm^2, i_{y1}=2.33cm,$$

$$I_{z1}=39.97cm^4, y_o=2.04cm$$

该组合截面的几何特性:

$$I_z=2(39.97+7.367\times 2.04^2)\approx 141.257\,cm^4$$

$$i_z=\sqrt{I_z/A}\approx 3.097cm \qquad i_{min}=i_y=2.33cm$$

$$i_{\min} = i_y = 2.33cm$$

两端铰支，取μ=1，则柔度为：

$$\lambda = \mu l / i = 3400 / 2.33 = 145.92$$

查表得稳定因数：

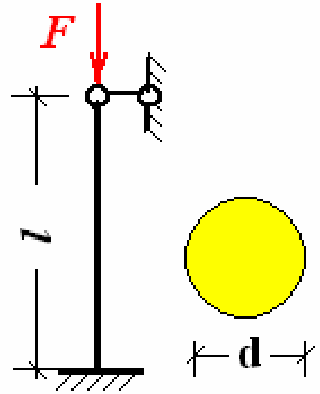
$$\varphi = 0.383 - \frac{0.383 - 0.339}{10} \times 5.92 \approx 0.357$$

$$\frac{F}{A} = \frac{6 \times 10^4}{2 \times 7.367 \times 10^{-4}} \approx 40.72 MPa$$

$$< \varphi[\sigma] = 0.357 \times 160 = 49.98 MPa$$

稳定。

【习10-8】长度l=9m的上端铰支下端固定的压杆，其直径d=150mm，Q235钢，属a类截面，$[\sigma]=160MPa$ 求此杆的许可荷载[F]。



解：截面几何特性：

$$A=\pi d^2/4\approx 176.7cm^2,$$

$$i=d/4=37.5mm,$$

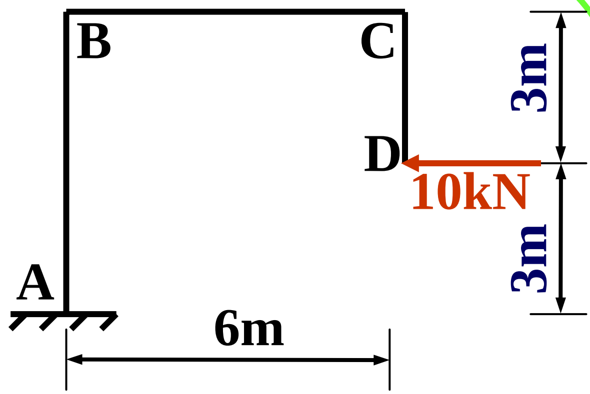
μ=0.7，柔度为： $\lambda=\mu l/i=0.7\times 9000/37.5=168$

查表得： $$\varphi=0.302-\frac{0.302-0.27}{10}\times 8\approx 0.276$$

$$F\le\varphi A[\sigma]=0.276\times 176.7\times 10^{-4}\times 16\times 10^{7}=780.3kN$$

此杆的许可压力：[F]＝kN。

习11-2 作图示刚架的内力图。



习11-2(a) 解：

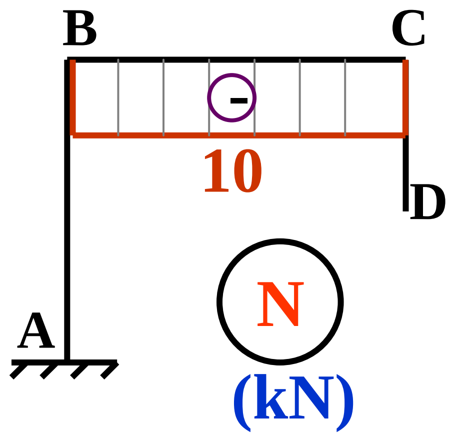
1） 分DC、CB、BA三段作图：

无分布荷载作用，各轴力图和剪力图无为平直线；M图为平直线或斜直线。

求控制截面的轴力值：

N_{DC}=0，N_{CB}=-10kN， N_{AB}=0，

2） 作N图，如图示。



求控制截面的剪力：

Q_{DC}=10kN，Q_{CB}=0 ，Q_{AB}=-10kN，

3） 作Q图，如图示。

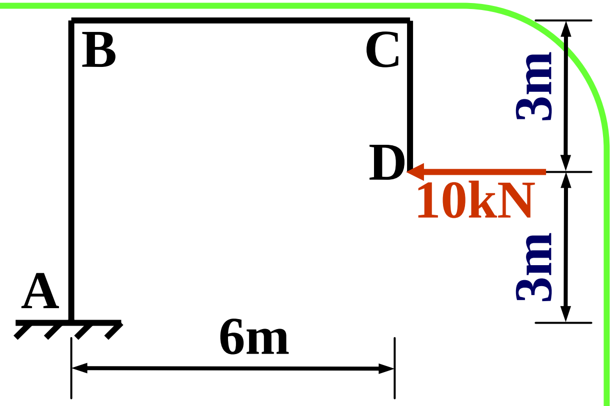
求控制截面的M值：

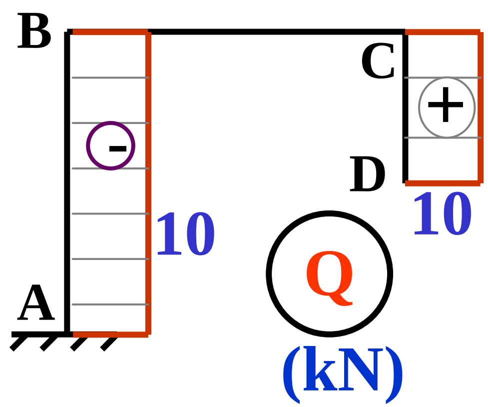
M_{DC}=0，　M_{CD}=30kN.m(外拉)，

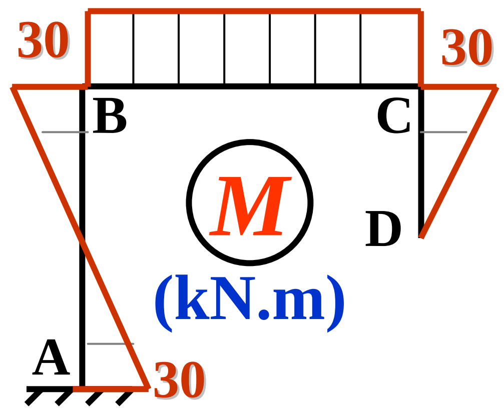
M_{CB}=M_{BC}=30 kN.m(外拉) = M_{BA}，

M_{AB}=30kN.m(内拉)。

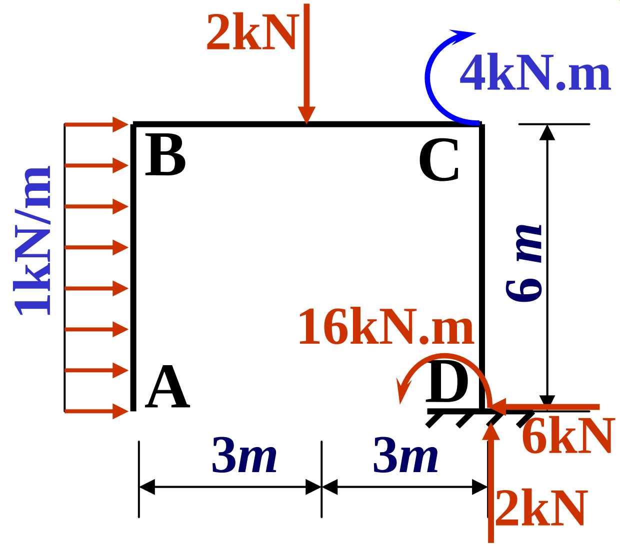
4） 作M图，如图示。







习11-2(b) 解:



解：1、求支反力,

$X_D=6$，$Y_D=2kN$,$M_D=16$ kN.m, 方向如图

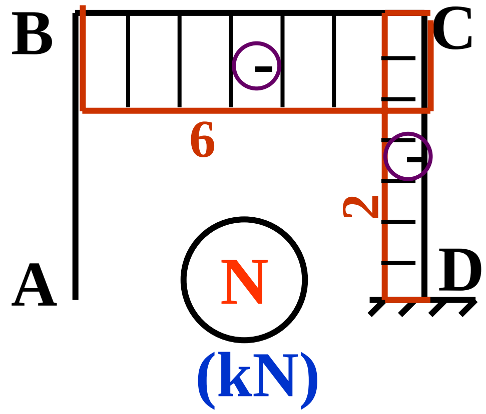
2、分段、分析图的形状,

求控制截面的N值：

$N_{AB}=0$,

$N_{BC}=-6kN$,

$N_{CD}=-2kN$

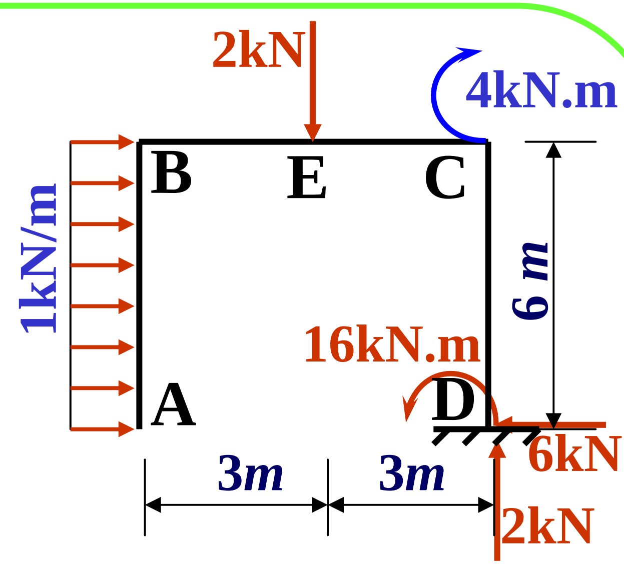


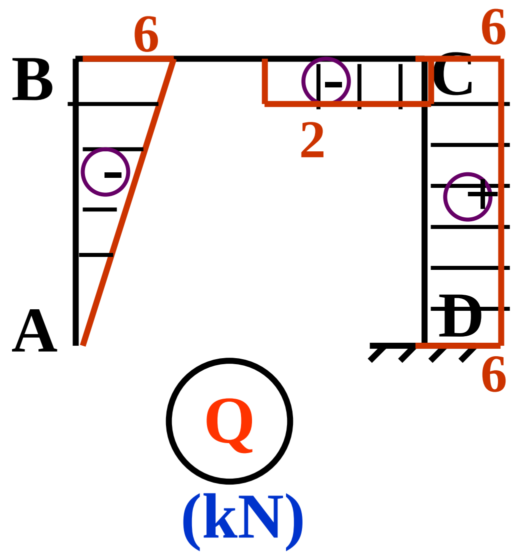
绘N图。

求控制截面的Q值：

Q_A=0、Q_{BA}=-6、Q_{BE}=0 、
Q_{EC}=-2kN 、Q_{CD} =6kN。

3） 作Q图，如图示。





求控制截面的M值：

$M_A=0$，

$M_{BA}=M_{BE}=18$ kN.m(外拉)

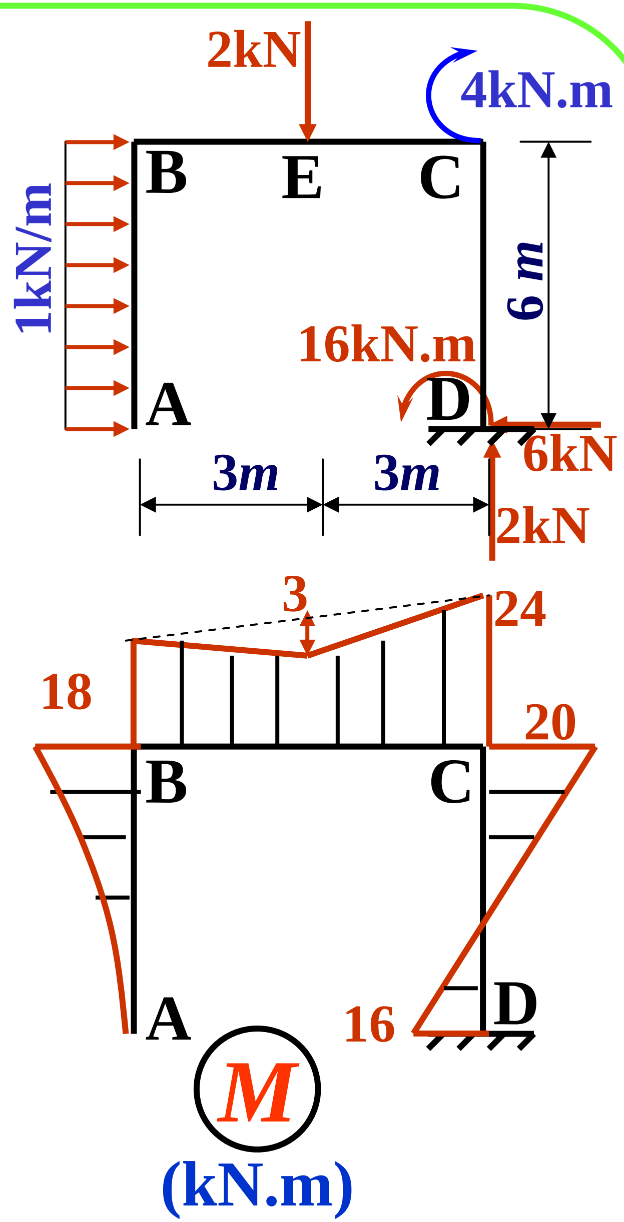
$M_{CE}=24$kN.m (外拉)，

$M_{CD}=20$ (外拉)，

$M_{DC}=16$kN.m(内拉)。

在E点向下迭加3kN.m。

4） 作M图，如图示。



习11-2(c) 解:

解：1、求支反力，

如图示

2、分段、

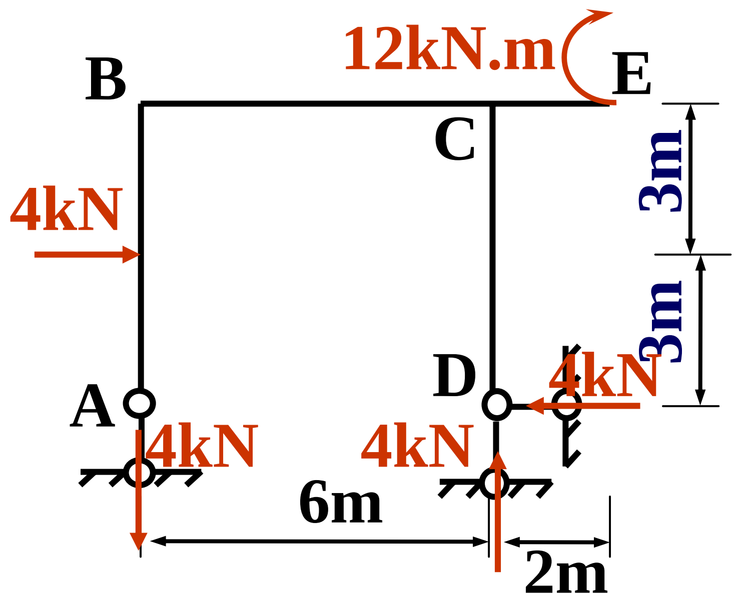
分析图的形状，

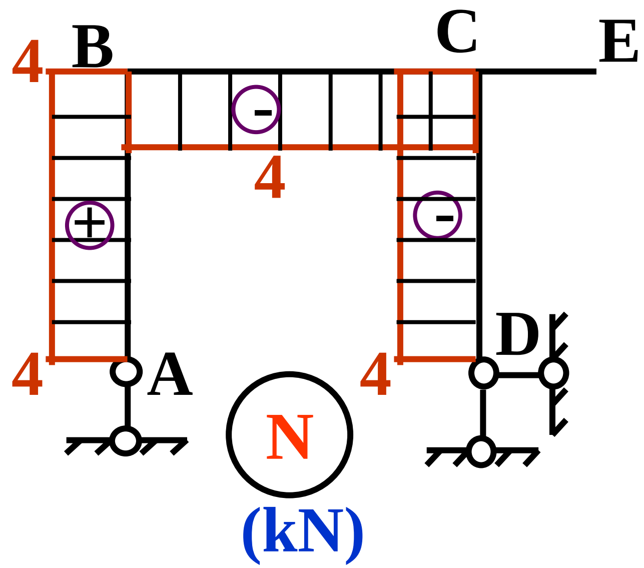
求控制截面的N值：

N_{AB}=4kN，N_{BC}=-4kN，

N_{CE} =0，N_{CD} =-4kN

绘N图。





求控制截面的Q值：

Q_{AO}=0、

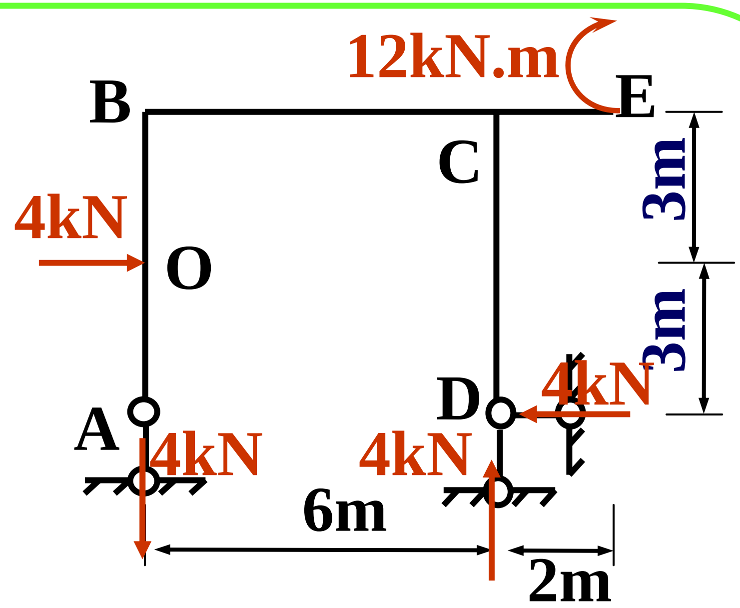
Q_{BO}=-4、

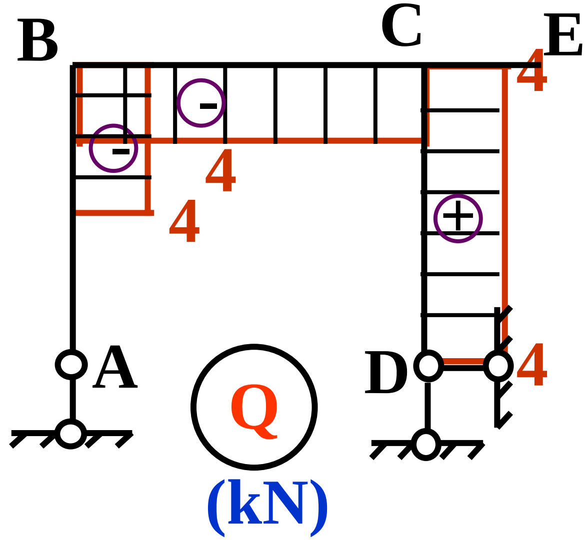
Q_{BC}=-4 kN、

Q_{EC}=0 、

Q_{CD} =4kN。

3） 作Q图，如图示。





求控制截面的M值：

$M_A=M_O=0$，

$M_{OB}=M_{BC}=12$ kN.m(外拉)

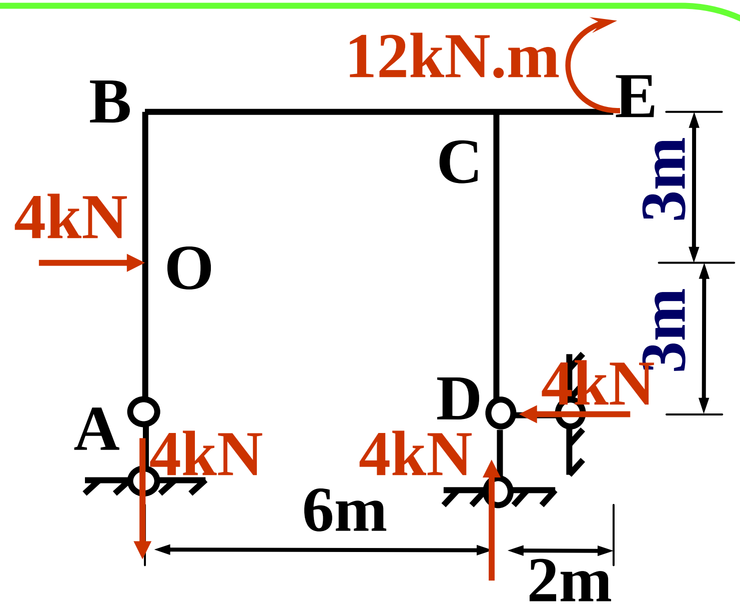
$M_{CB}=36$ (外拉)，

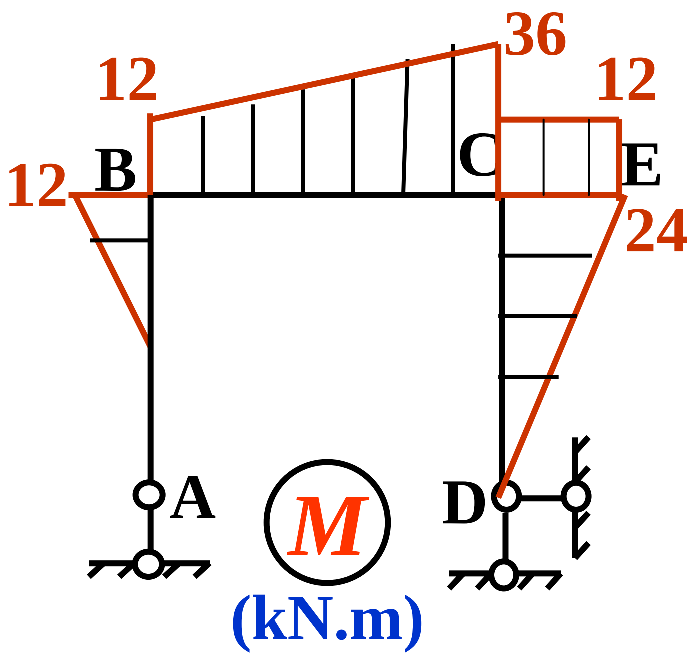
$M_{CE}=M_E=12$ (外拉)，

$M_{CD}=24$kN.m(内拉)，

$M_D=0$。

4） 作M图，如图示。





习11-2(*f*) 解：

解:

1、求支反力，图示

2、分段、

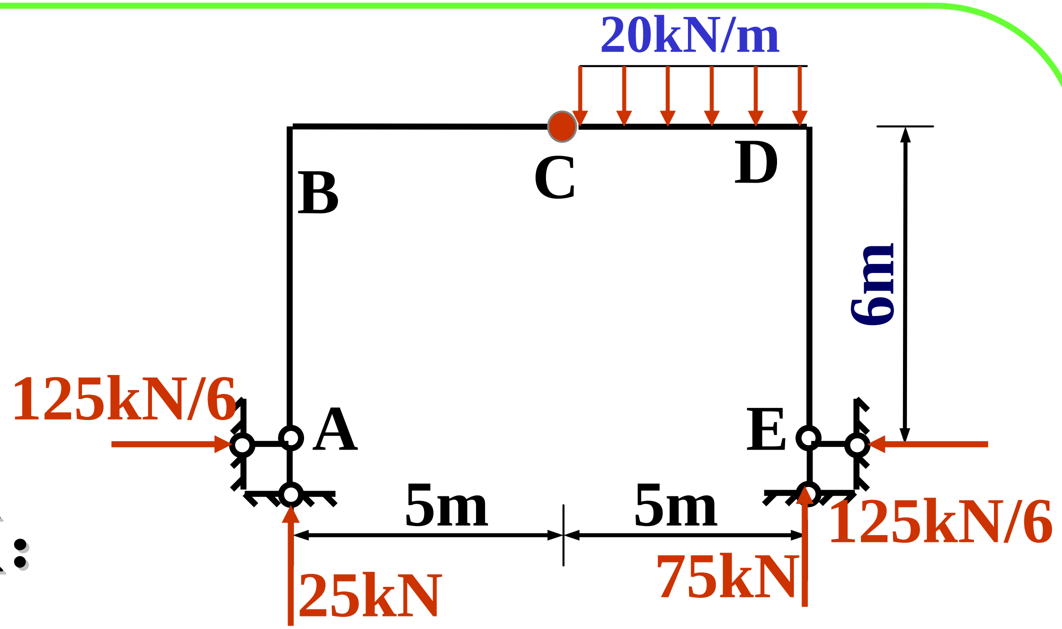
3、求控制截面的N值：

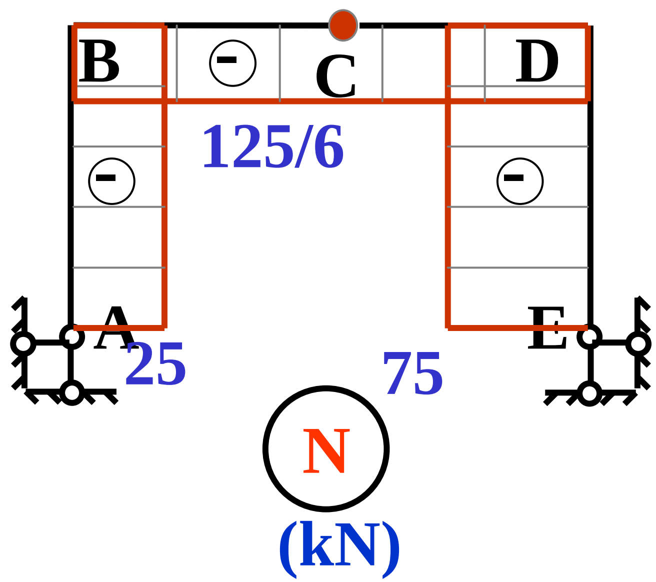
$$N_{AB}=-25kN,$$

$$N_{BC}=\frac{-125}{6}kN=N_{CD},$$

$$N_{DE}=-75kN,$$

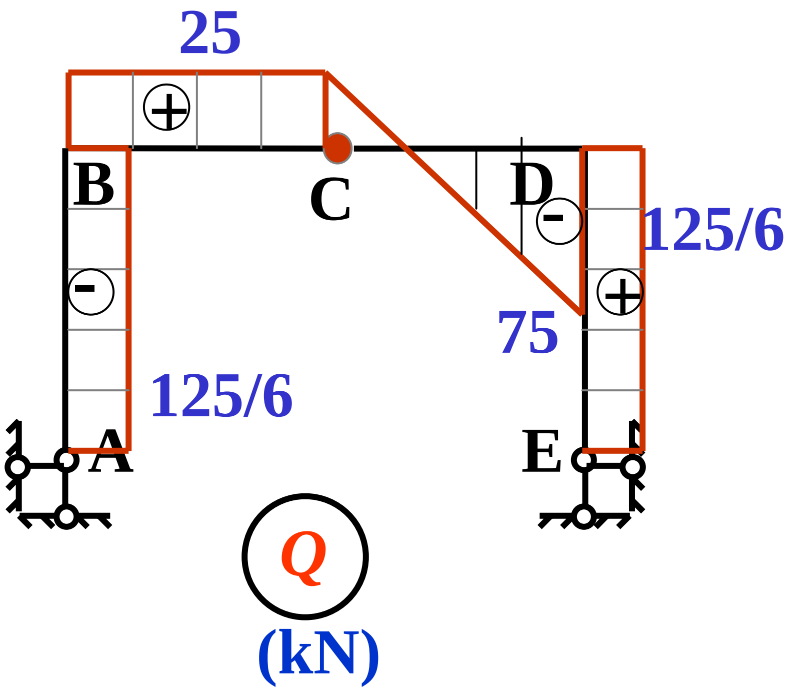
4、绘轴力图。



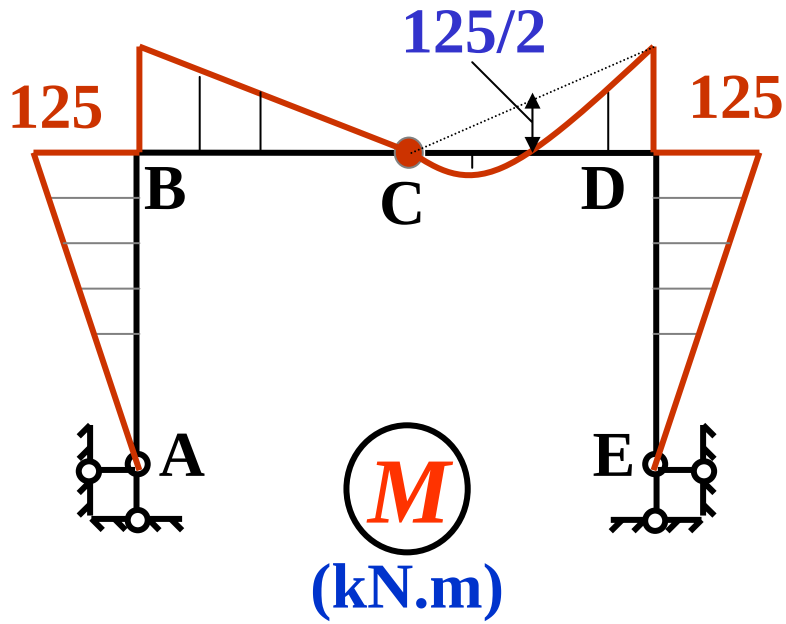


续习11-2(*f*) 解：

5、求控制截面的Q值，作Q图：



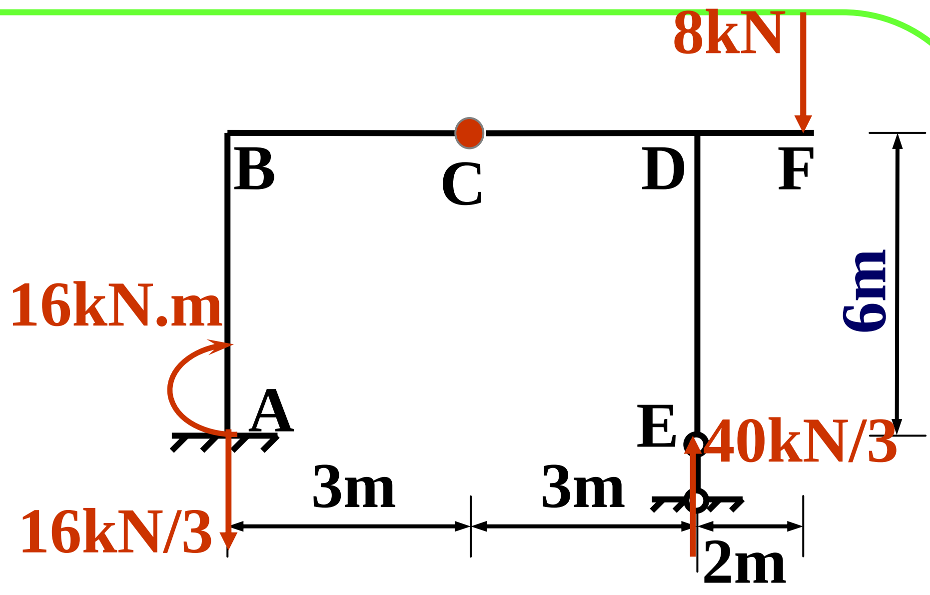
6、求控制截面的M值，作M图：



习11-2(h) 解：

解:

1、求支反力，图示



2、分段、

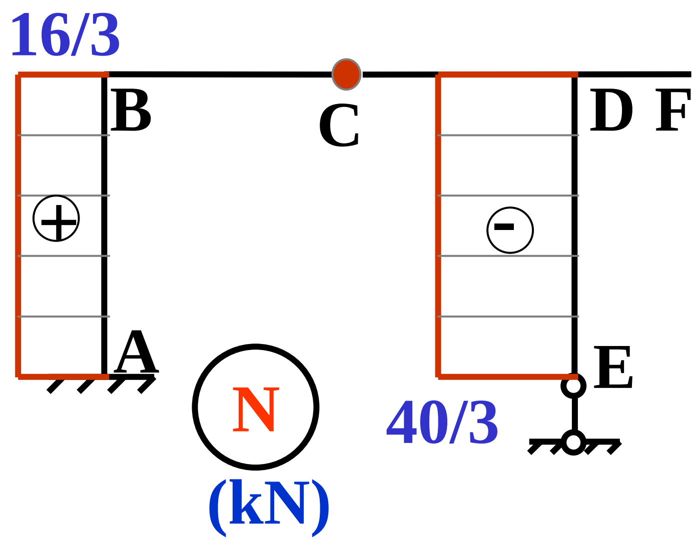
3、求控制截面的N值：

$$N_{AB} = 16kN/3,$$

$$N_{BC} = 0 = N_{CD},$$

$$N_{DE} = -40kN/3,$$

4、绘轴力图。



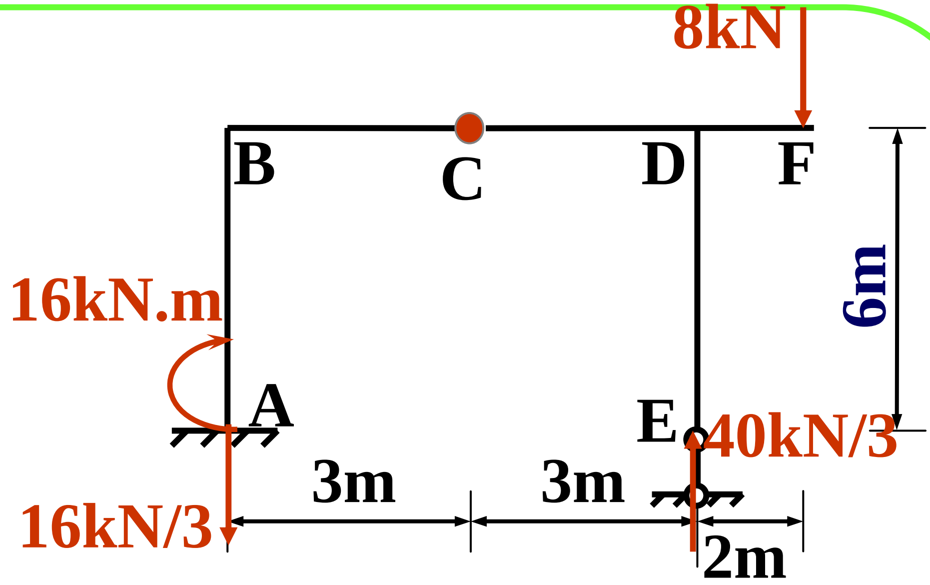
5、求控制截面的剪力

$$Q_{AB}=0=Q_{DE},$$

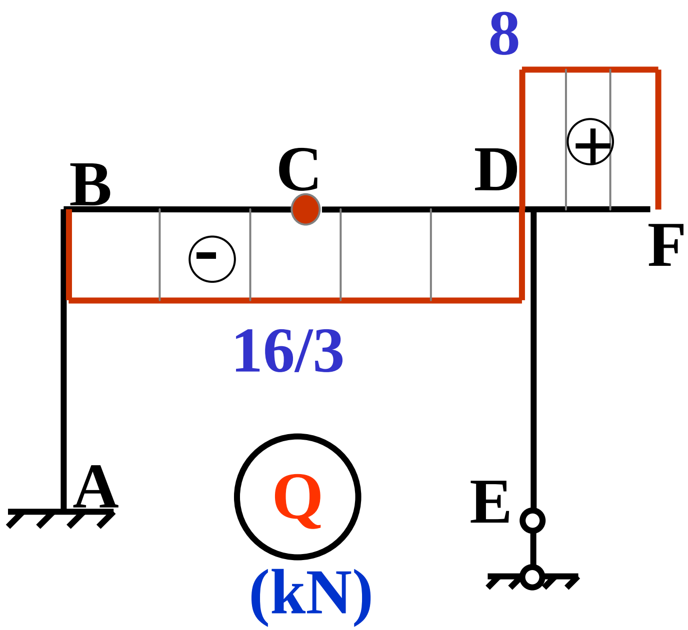
$$Q_{BC}=-16kN/3$$

$$Q_{CD}=Q_{BC}$$

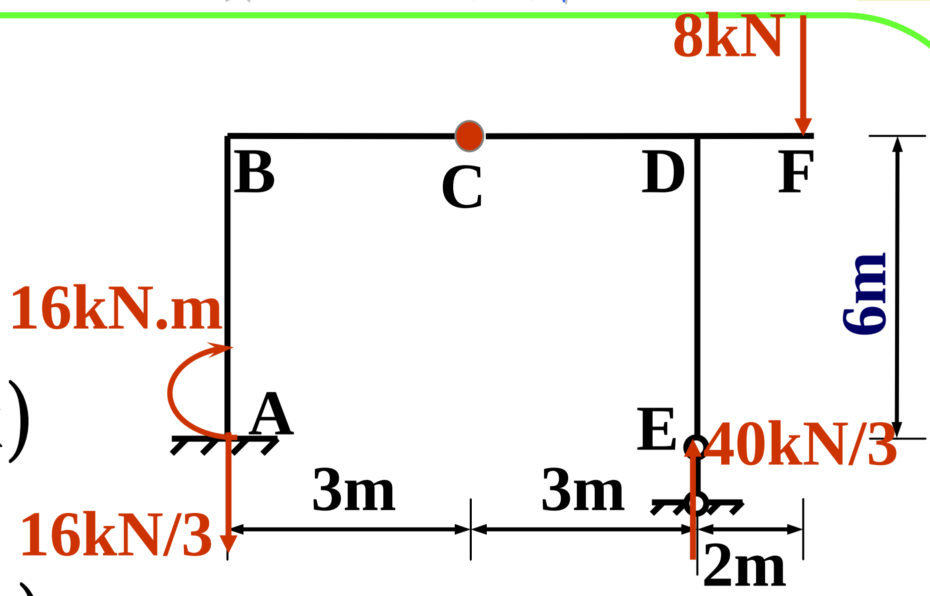
$$Q_{DF}=8kN,$$



绘剪力图。



6、求控制截面的弯矩



$$M_{CB} = M_{CD} = 0$$

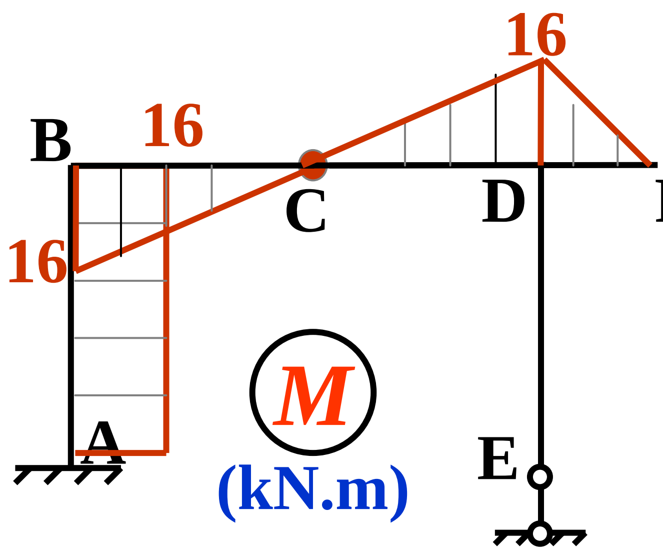
$$M_{ED} = M_{E} = M_{F} = 0$$

$$M_{AB} = M_{BA} = 16kN \cdot m(\text{外拉})$$

$$M_{BC} = 16kN \cdot m(\text{外拉})$$

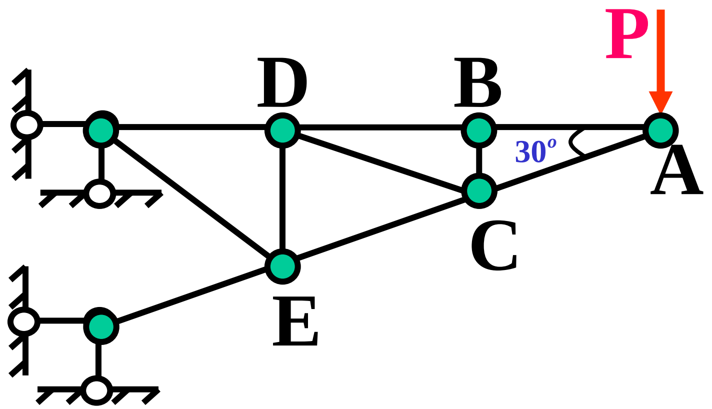
$$M_{DF} = M_{DC} = 16kN \cdot m(\text{外拉})$$

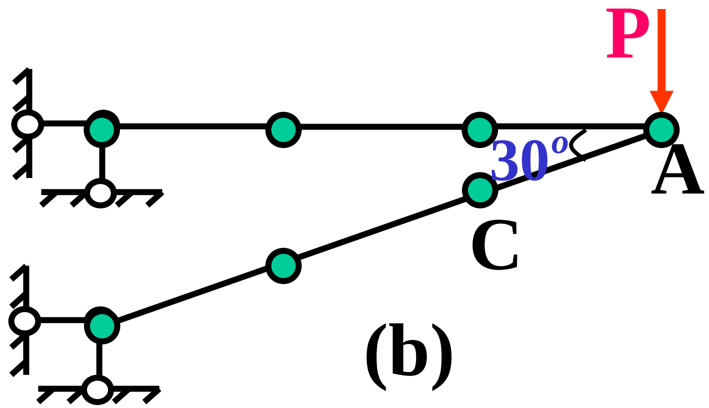
绘弯矩图。



习 11-4（a） 求各杆的内力。

解： 判得所腹杆全为零杆。结构简化为(b)图示。各横杆轴力相等、各斜杆轴力相等。





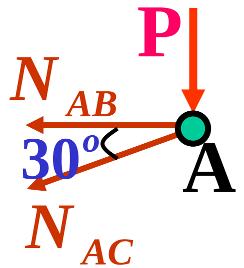
(b)

取A结点为分离体，分别求得横杆、斜杆轴力，

$$\sum Y = 0: \quad N_{AC}\sin 30^o = -P$$

$$\sum X = 0: \quad N_{AC}\cos 30^o = -N_{AB}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} N_{AB} = -2P \\ N_{AC} = -\sqrt{3}P \end{cases}$$

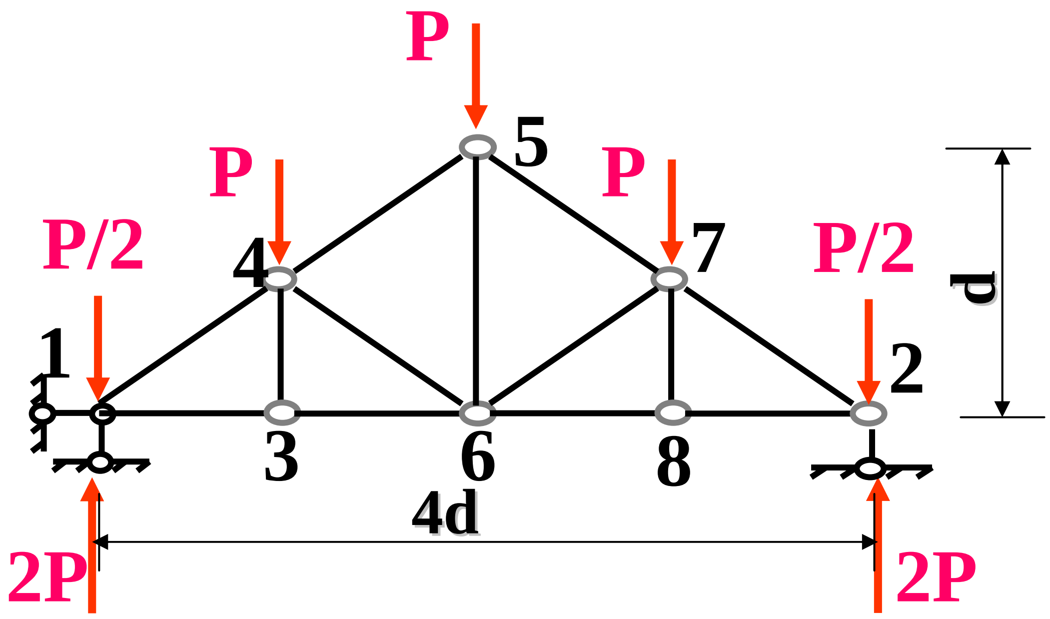


习 11-4（b）求各杆的内力。 d=3m。

解：求支反力：

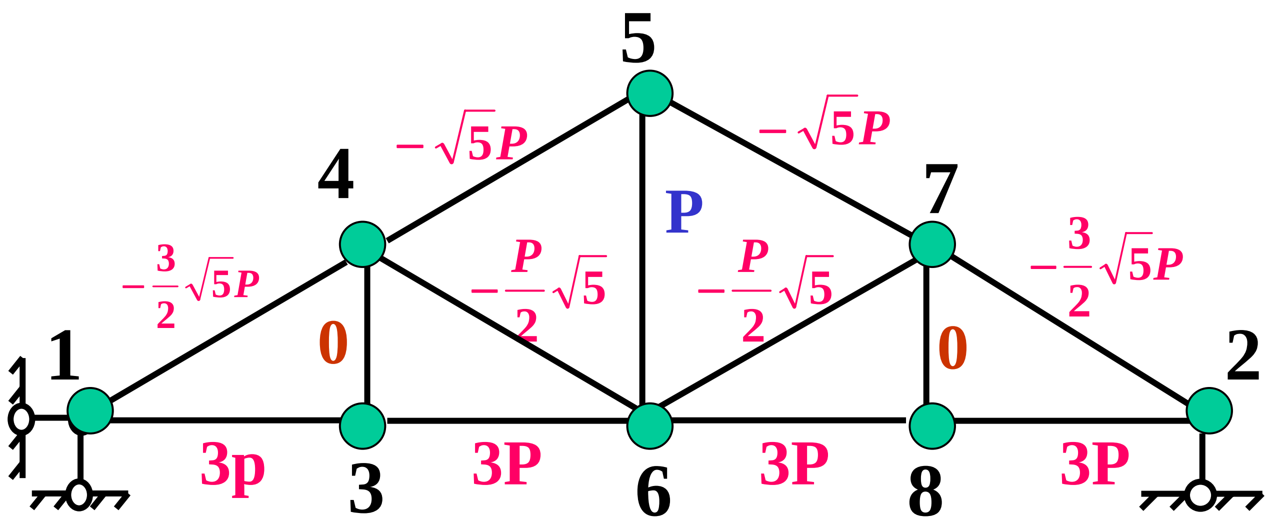
用结点法求解，由于对称，只求半边的轴力。分别取2、8、7、5结点为分离体，

求得各杆的内力。

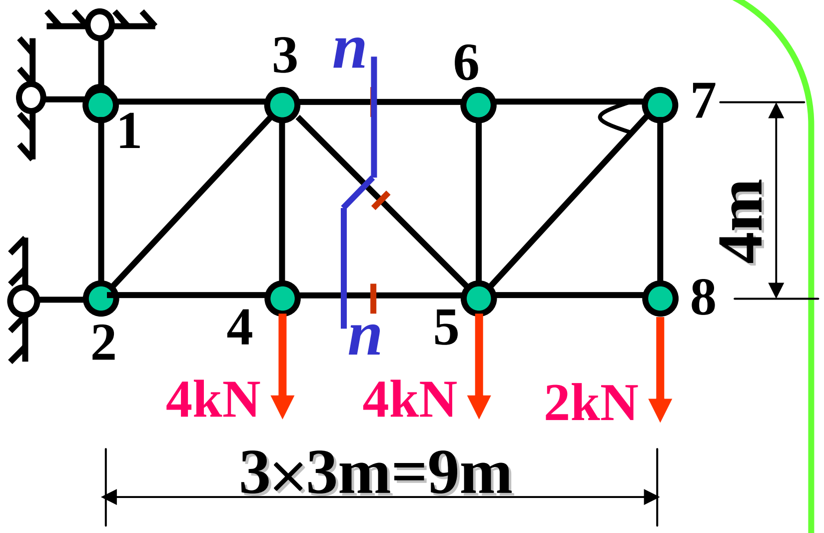


各杆的内力如图示。

轴力图。


5
4
7
1
2
3
6
8
$-\sqrt{5}P$
$-\sqrt{5}P$
P
$-\frac{3}{2}\sqrt{5}P$
$-\frac{3}{2}\sqrt{5}P$
$-\frac{P}{2}\sqrt{5}$
$-\frac{P}{2}\sqrt{5}$
0
0
3p
3P
3P
3P

习 11-5　求指定杆的内力。



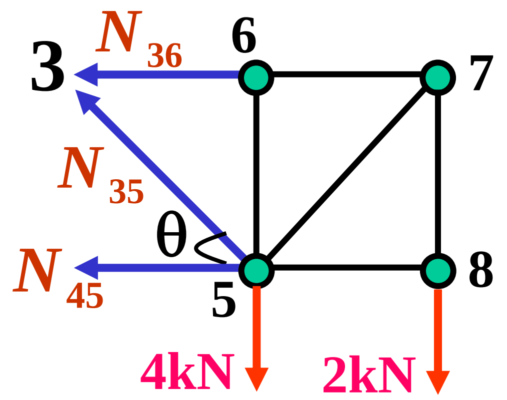
解： 取*nn*截面右边为分离体，受力如图(b)所示。

$$\sum M_5 = 0: \quad 4N_{45} = 4\times3 + 2\times6$$

$$\sum M_3 = 0: \quad 4N_{36} = 2\times3 = 6kN$$

$$\sum X = 0: \quad N_{35}\sin\theta = -N_{36} - N_{45}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} N_{36} = 1.5kN \\ N_{35} = 7.5kN \\ N_{45} = -6kN \end{cases}$$



(b)

习12-5　求图示刚架C点的水平位移和A端的转角。

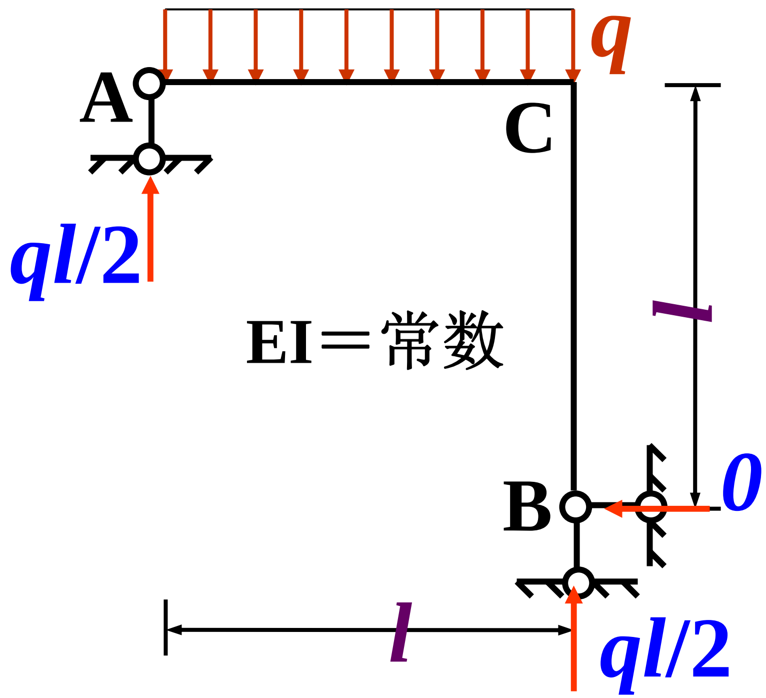
解：

1)求支反力，如图示

2)作荷载弯矩图，如Mp图，

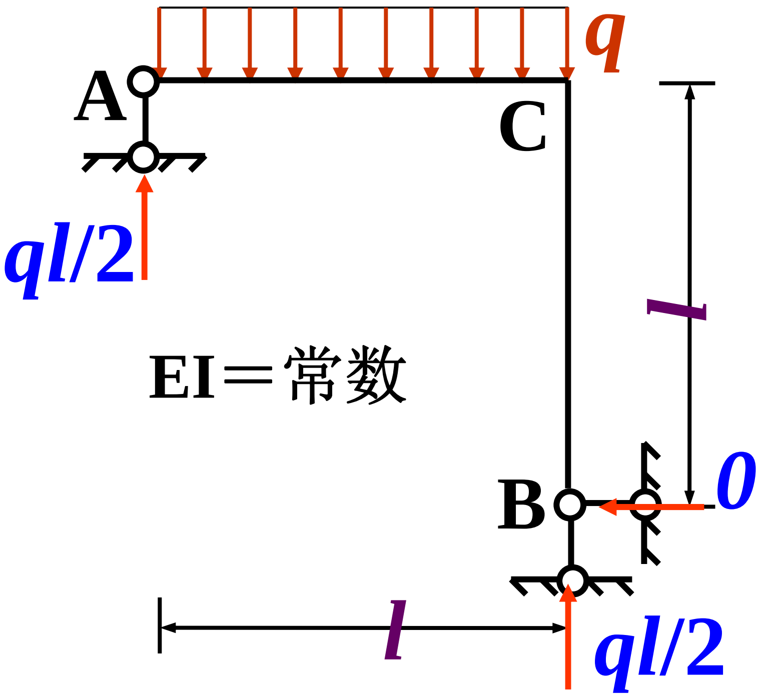
3) 设虚力状态(在C点加水平单位力)，作单位弯矩图，

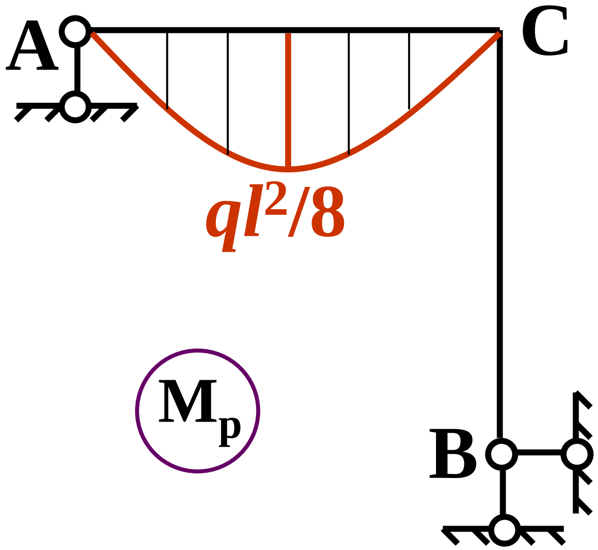
4) 图乘，求C点的水平位移

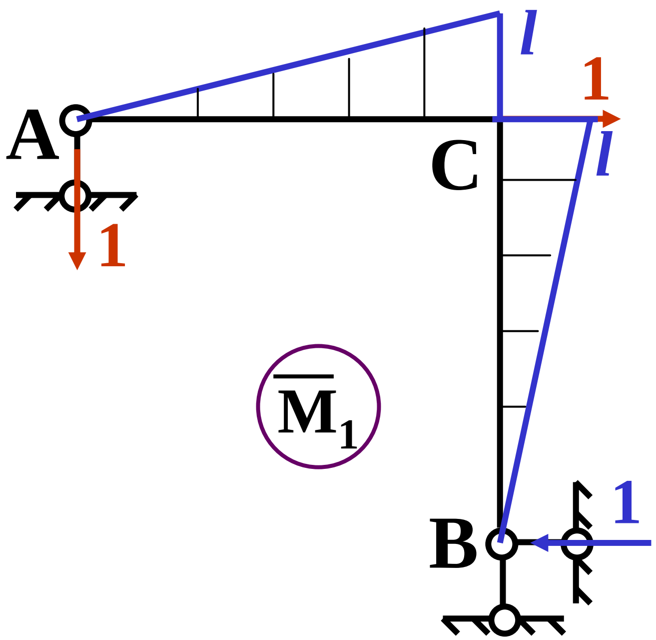


$$A=\frac{2}{3}\cdot l\cdot\frac{ql^2}{8},\quad y_1=-\frac{l}{2}$$

$$\Delta_C^H=\frac{Ay_1}{EI}=\frac{-ql^3}{12EI}\cdot\frac{l}{2}=\frac{-ql^4}{24EI}(\leftarrow)$$



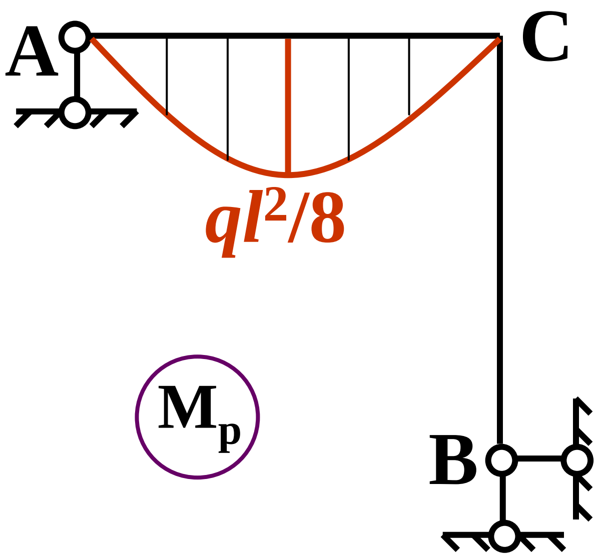


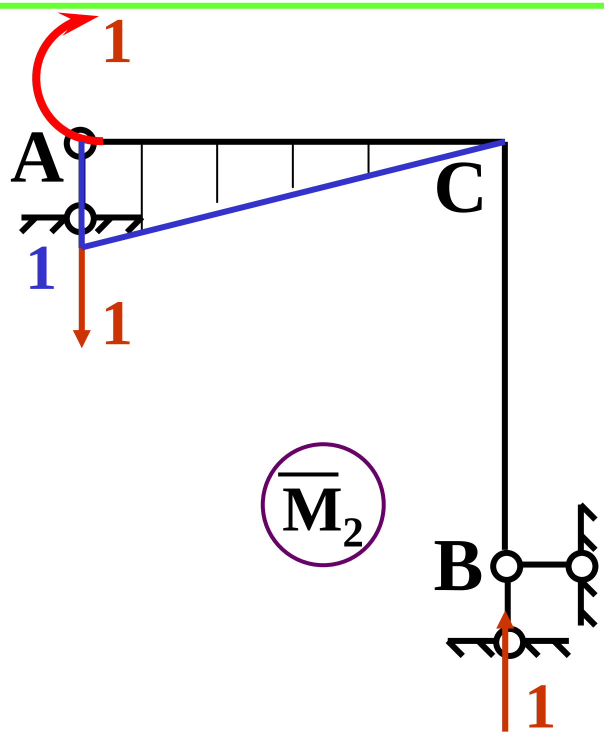


5) 设虚力状态(在A点加单位力偶)，作单位弯矩图，

6) 图乘，求A端的转角

续 习12-5 解





$$A=\frac{2}{3}\cdot l\cdot\frac{ql^2}{8}=\frac{ql^3}{12},\quad y_2=\frac{l}{2}$$

$$\varphi_A=\frac{Ay_1}{EI}=\frac{ql^3}{12EI}\cdot\frac{l}{2}=\frac{ql^4}{24EI}$$

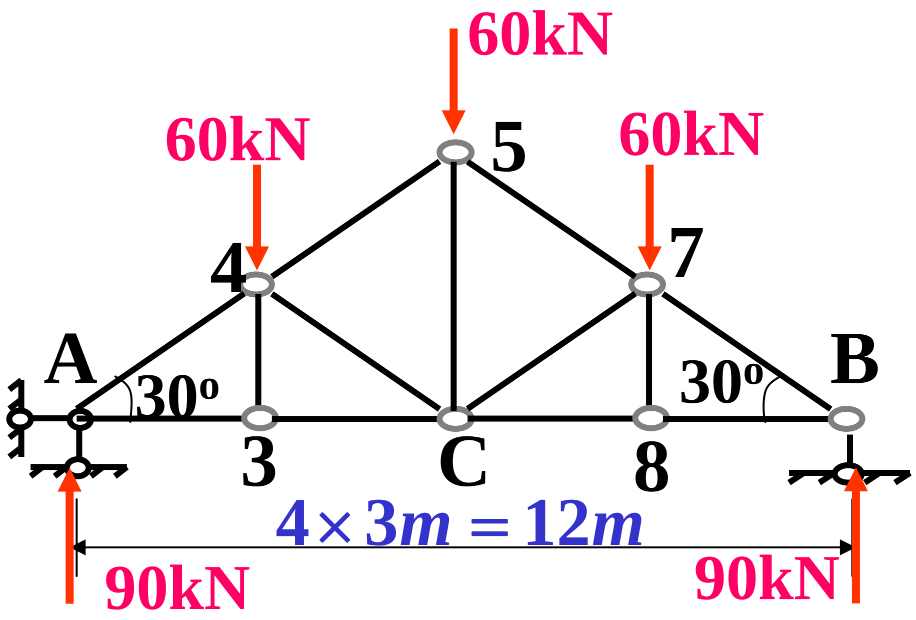
习 12-7 求C的竖向位移。各杆的EA相同。

解：求支反力：

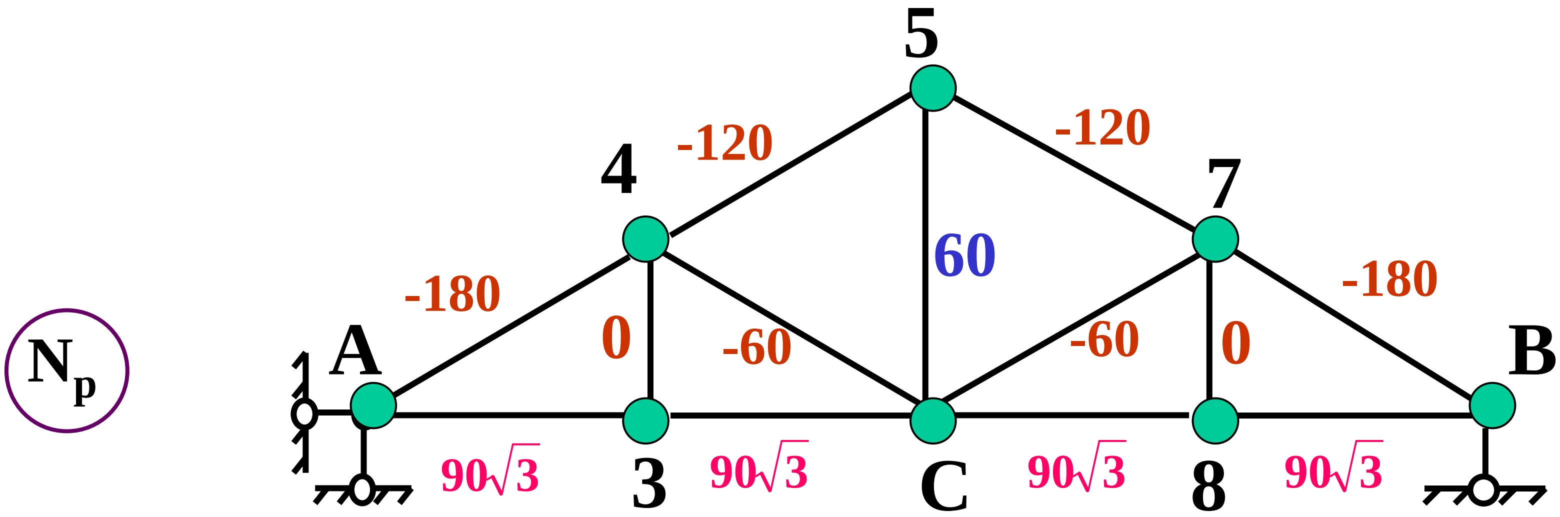
用结点法求解，由于对称，只求半边的轴力。

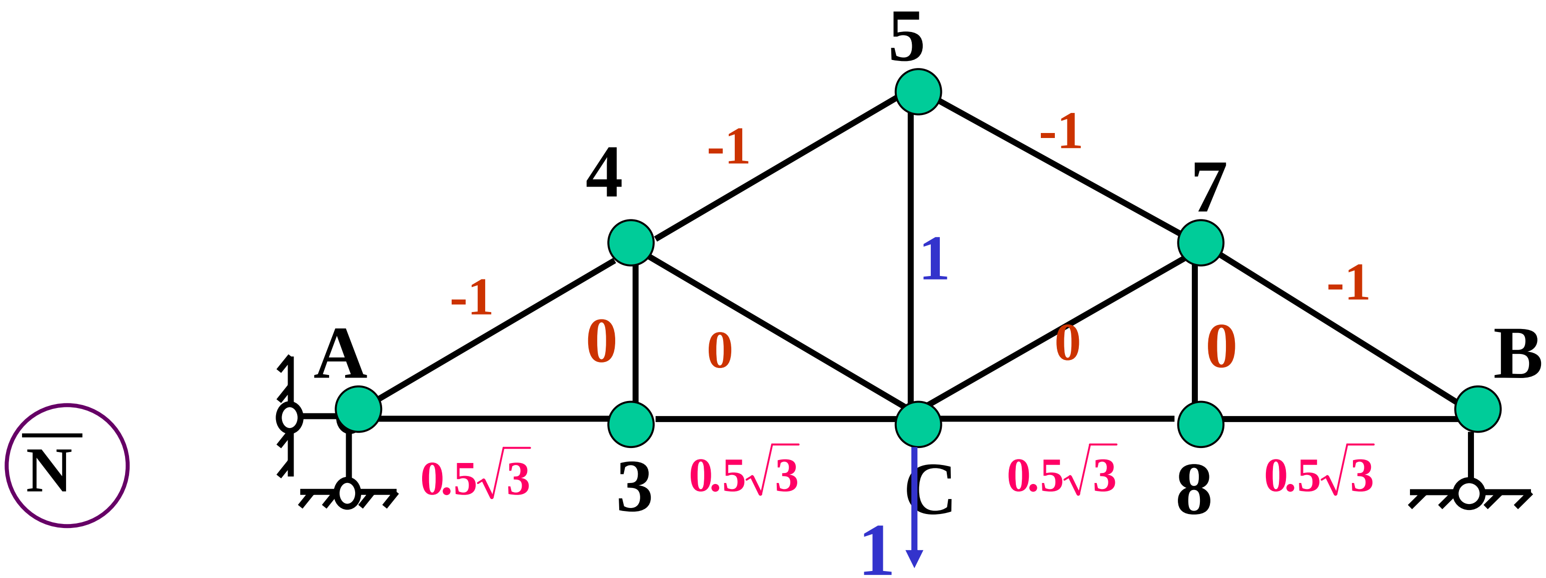
求得各杆的内力。

作已知状态下的轴力图。



设虚力状态(在C点加单位力)，作单位轴力图，


N_p
5
4
7
A
B
3
C
8
-120
-120
-180
-180
0
-60
60
-60
0
90√3
90√3
90√3
90√3


$\overline{N}$
5
4
7
A
B
3
C
8
-1
-1
-1
-1
0
0
1
0
0
0.5√3
0.5√3
0.5√3
0.5√3
1

图乘，得C的竖向位移

$$\Delta_{CV}=\frac{10^3}{EA}\left[4\times 90\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times 3+\frac{2(180+120)+60}{\cos 30^o}\times 1\times 3\right]$$

$$\Longrightarrow \quad \Delta_{CV}=\frac{10^3}{EA}\left[1620+1320\sqrt{3}\right]$$

习12-8. 求图示桁架C点的竖向位移。EA相同。

解:

1)求支座反力,

2)求 F_{NP} 图;

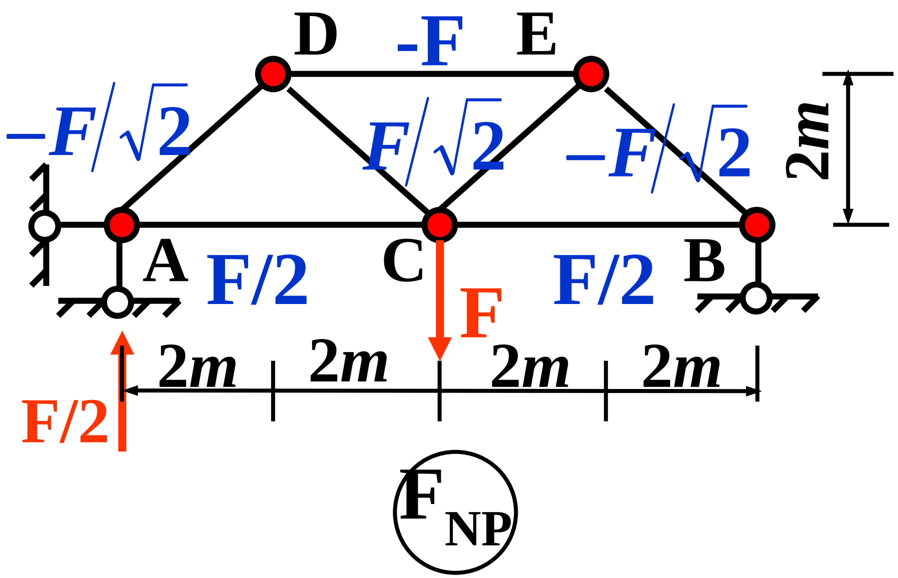
3)在C处虚设单位力,

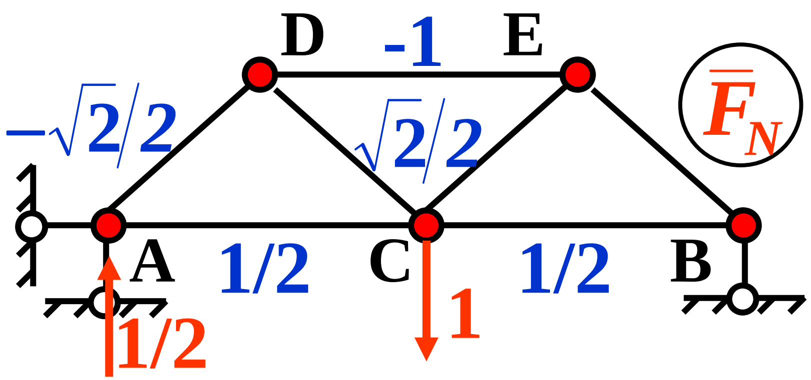
并作 $\overline{F}_N$ 图;

虚功方程:

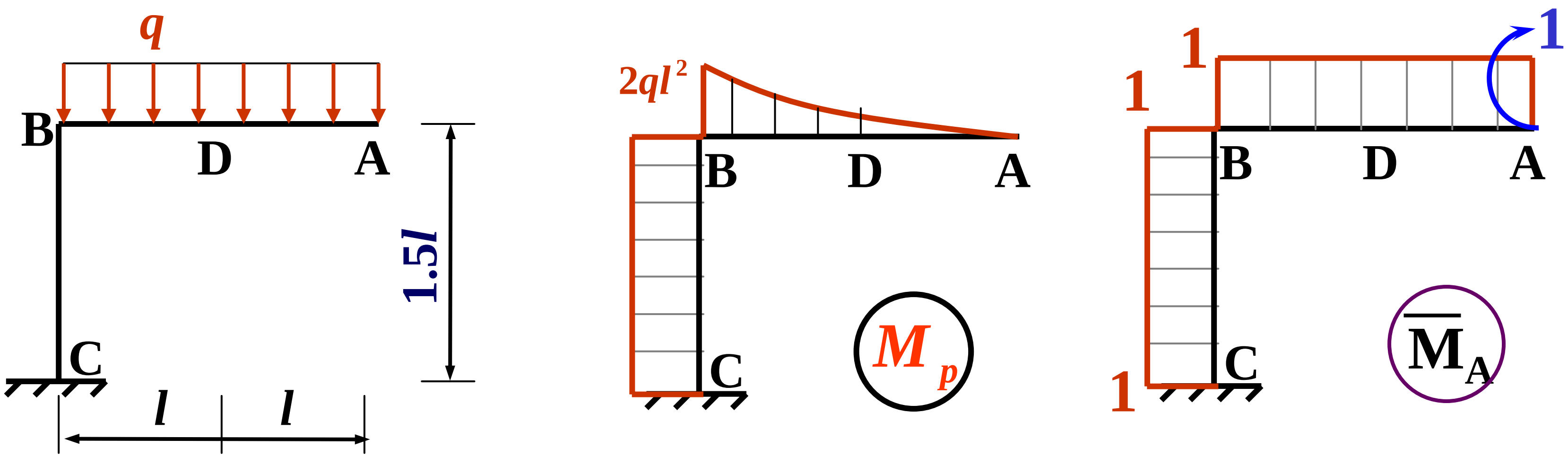
$$\Delta_C^V = \sum\left(\frac{\overline{F}_N F_{NP}}{EA}l\right)$$

$$\Delta_C^V = \frac{\left(6+4\sqrt{2}\right)F}{EA}(\downarrow)$$





习12-10 作求图示刚架A截面的转角和D点的竖向位移。CB刚度为EI，AB的为2EI。



解：

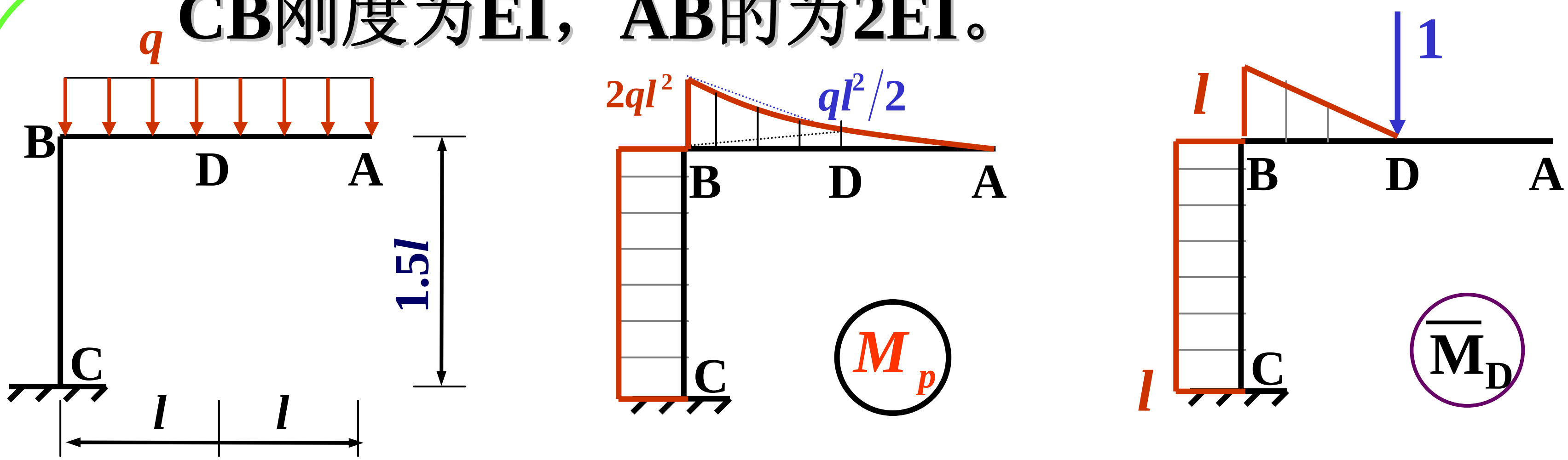
1）作荷载弯矩图，如图示：

2）在A处虚设单位力偶，并作 $\overline{M}_A$ 图；

3) 图乘，求A端的转角

$$\varphi_A=\frac{1}{EI}\left(2ql^2\times1.5l\times1\right)+\frac{1}{2EI}\left(\frac{2ql^2\cdot2l\cdot1}{3}\right)=\frac{11ql^3}{3EI}$$

CB刚度为EI，AB的为2EI。



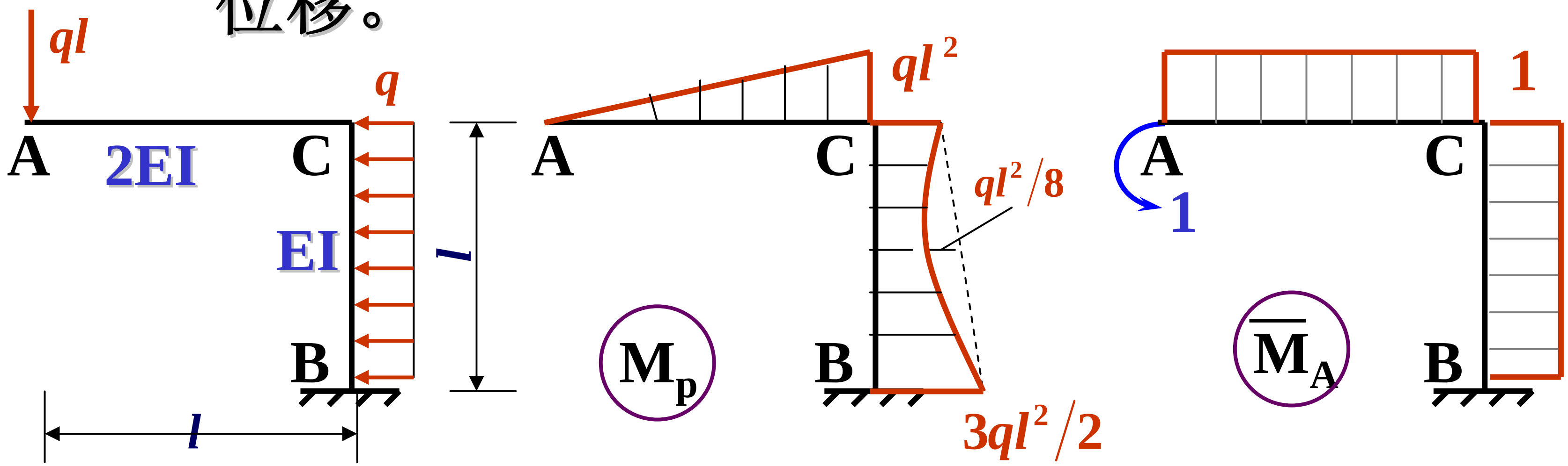
4）在D处虚设单位力，并作 $\overline{M}_D$ 图；

5) 图乘，求D点的竖向位移：将BD段的Mp图分为二个三角形和一个二次抛物线。

$$\Delta_{DV} = \frac{1}{EI}\left(2ql^2 \times 1.5l \times l\right) +$$

$$+\frac{ql^2}{2EI}\left(\frac{2\cdot l}{2}\times\frac{2l}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{l}{2}\times\frac{l}{3}-\frac{2l}{3}\times\frac{1}{8}\times\frac{l}{2}\right)=\frac{161ql^4}{48EI}$$

习12-13　求图示刚架A截面的转角和C点的水平位移。



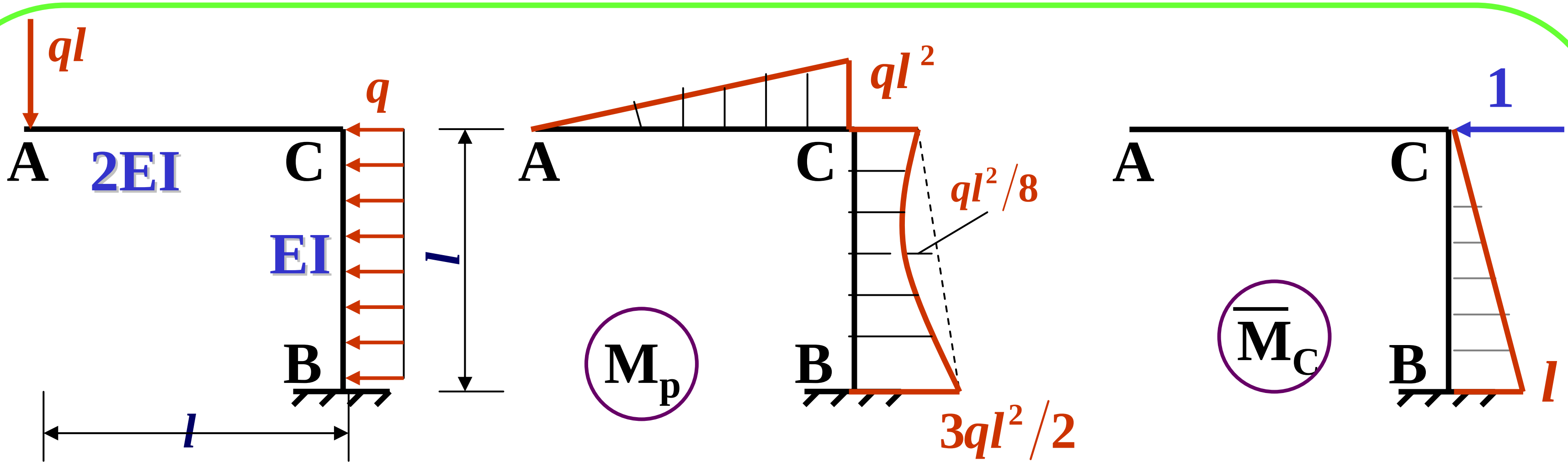
解：

1）作荷载弯矩图，如图示：

2）在A处虚设单位力偶，并作 $\overline{M}_A$ 图；

3) 图乘，求A端的转角,将BC段的Mp图分为二个三角形和一个二次抛物线。

$$\varphi_A=\frac{ql^2}{2EI}\left(\frac{l}{2}\times 1\right)+\frac{ql^2}{EI}\left(\frac{l}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{3l}{2}-\frac{2}{3}\times\frac{l}{8}\right)\times 1=\frac{17ql^3}{12EI}$$



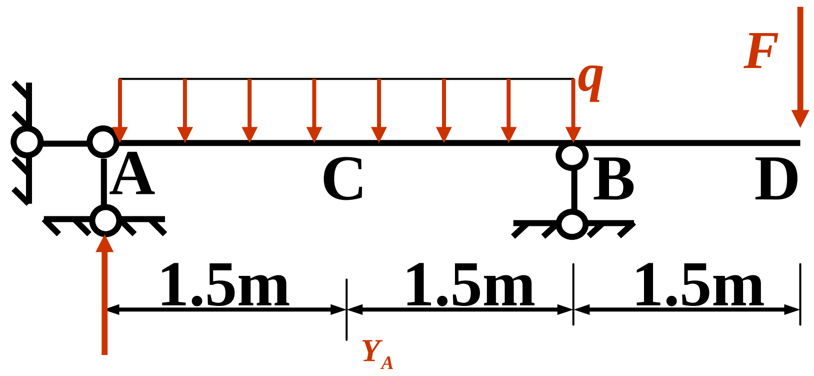
4）在C处虚设单位水平力，并作 $\overline{M}_C$ 图;

5) 图乘，求A端的转角,将BC段的Mp图分为二个三角形和一个二次抛物线。

$$\Delta_{CH} = \frac{ql^2}{EI}\left(\frac{1\times l}{2}\times\frac{l}{3}+\frac{l}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{2l}{3}-\frac{2}{3}\times\frac{l}{8}\times\frac{l}{2}\right)=\frac{5ql^4}{8EI}$$

水平向左。

习12-11 求图示梁C点的挠度。已知F=9kN，q=15kN/m，EI=常数。



解：（方法一）积分法

1）求支反力：

$$Y_A = 18kN$$

2）荷载作用的弯矩方程：

AB段：$M_p = 18x - 7.5x^2 \quad (0 \le x \le 3)$

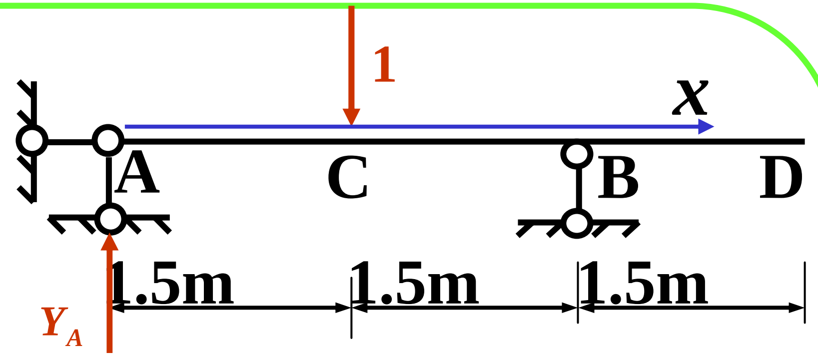
DB段：以D为原点，x向左为正

$$M_p = -9x^2 \quad (0 \le x \le 1.5)$$

3）在C处虚设单位竖向力，

列单位弯矩方程：

单位弯矩方程：



AC段： $Y_A = 0.5$

$$\overline{M} = 0.5x \quad (0 \le x \le 1.5)$$

CB段： $\overline{M} = 1.5x - (x - 1.5) \quad (1.5 \le x \le 3)$

4）积分：

$$\Delta_{CV} = \frac{1}{EI}\int_0^{1.5}(18x - 7.5x^2)0.5xdx$$

$$+\frac{1}{EI}\int_{1.5}^{3}(18x - 7.5x^2)[1.5x - (x - 1.5)]dx + 0$$

$$\Delta_{CV} \approx \frac{8.227}{EI}\times 10^3$$

求C点的挠度。F=9kN，q=15kN/m，EI=常数。

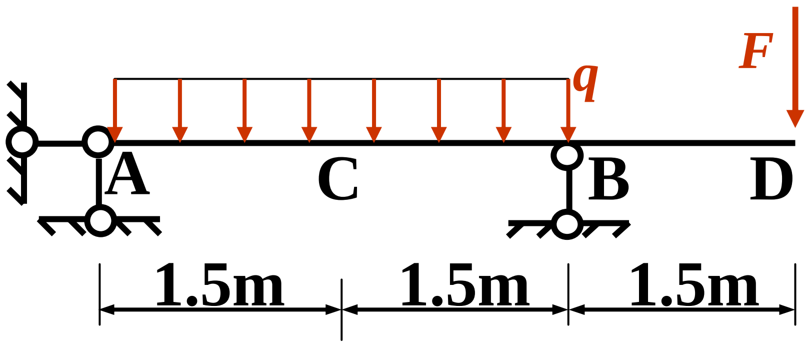
（方法二）图乘法:

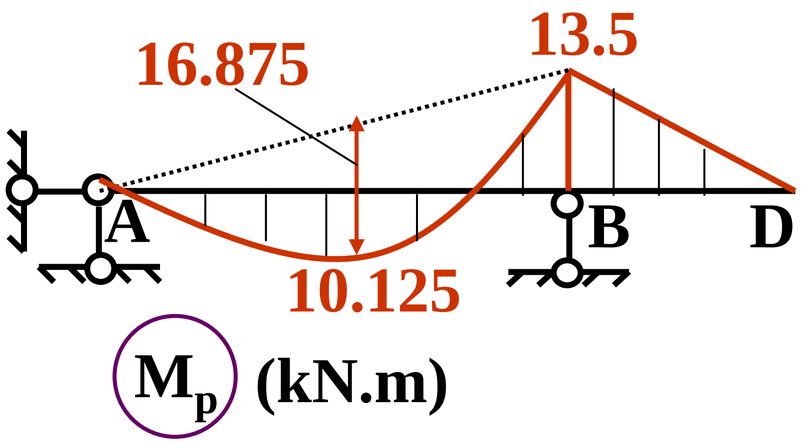
1）作荷载弯矩图，

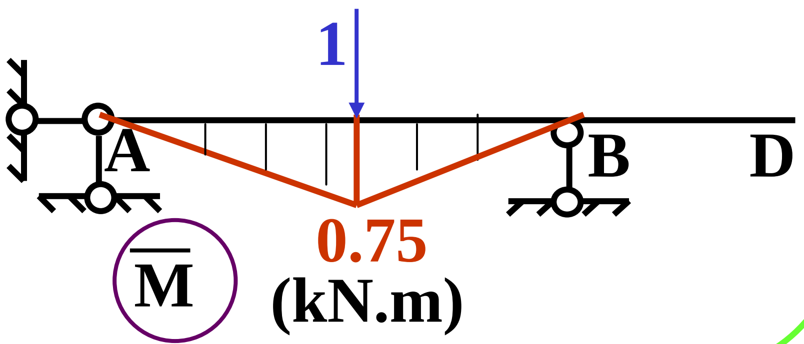
如图示:

2）在C处虚设竖向单位力，并作 $\overline{M}$ 图;

因为单位弯矩图是折线图，这里较复杂。将Mp图分解为一个三角形和一个二次抛物线，二次抛物线又分为两半图乘。



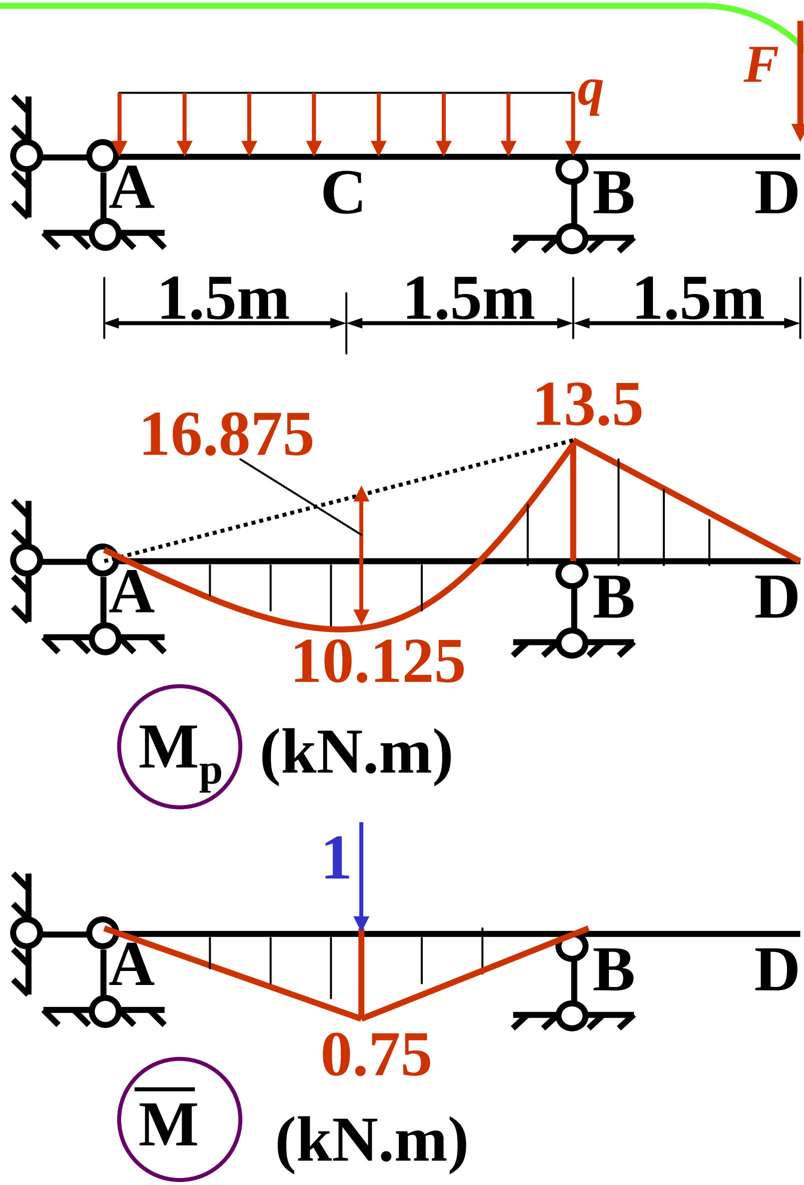




续 习12-11 解

$$\Delta_{CV}=\frac{10^3}{EI}\left(-\frac{0.75\times 3}{2}\times\frac{13.5}{2}+\frac{2}{3}\times 16.875\times 1.5\times\frac{5}{8}\times 0.75\times 2\right)$$

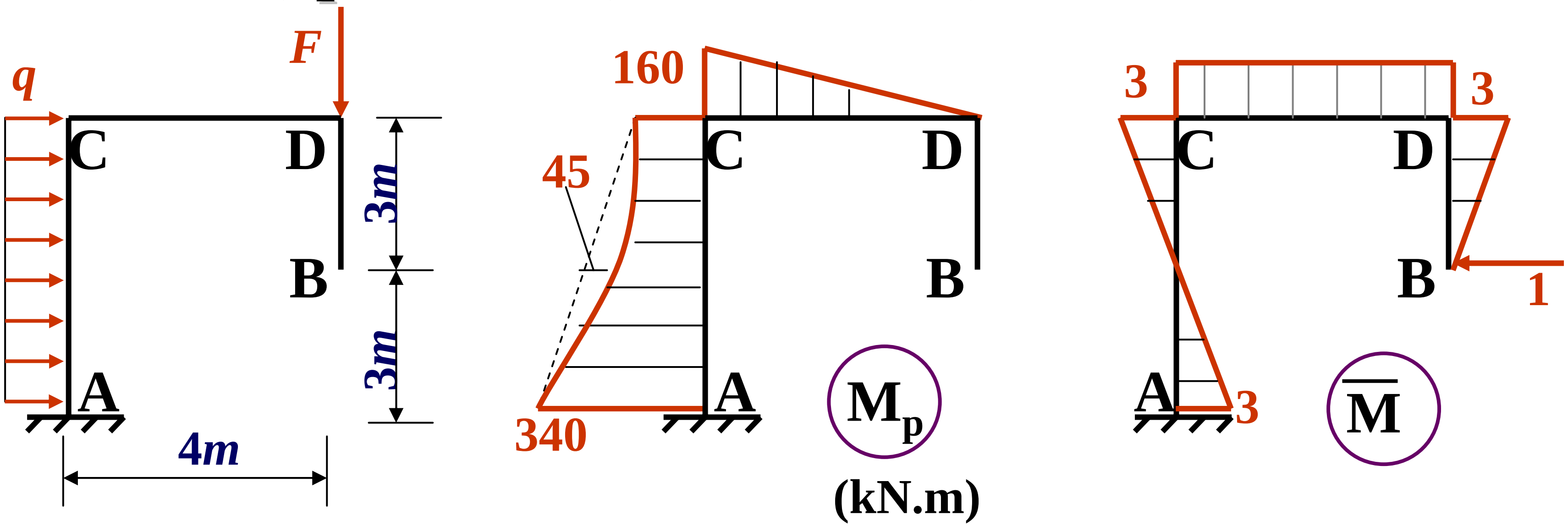
$$\approx\frac{8.227}{EI}\times 10^3$$



$$\Delta_{CV}\approx\frac{8.227}{EI}\times 10^3$$

习12-14　求图示刚架B点的水平位移。已知:

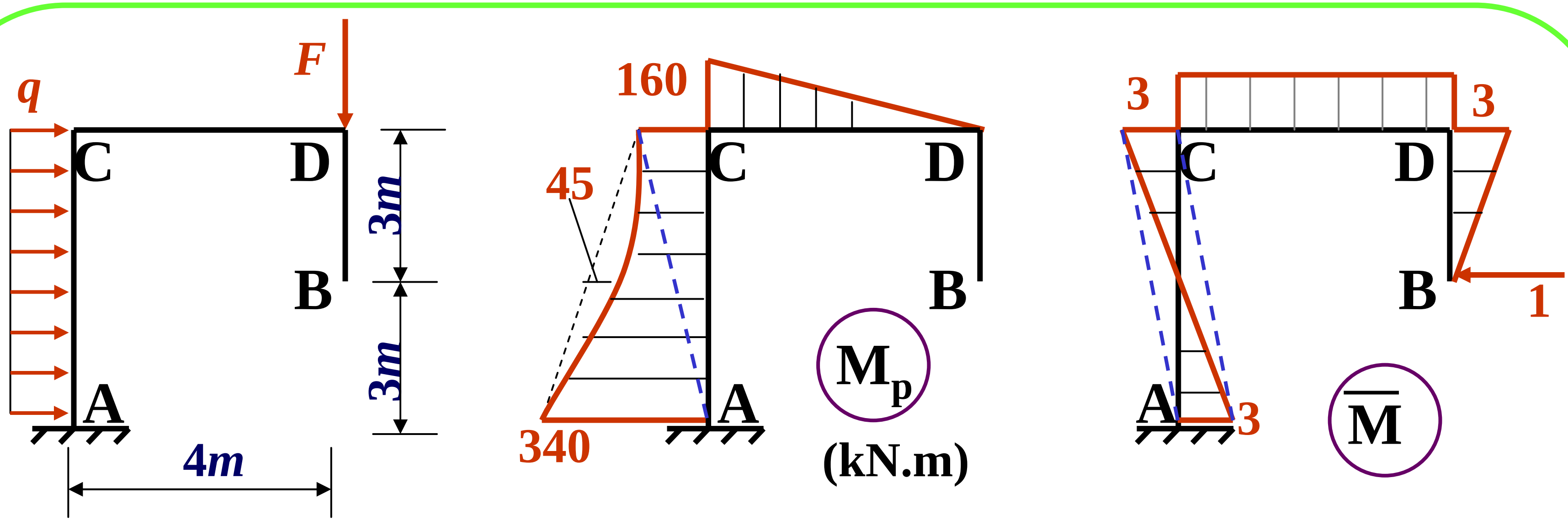
F=40kN,q=10kN/m,EI=210GPa, $I = 2.4\times10^4 cm^4$



解:

1）作荷载弯矩图，如图示:

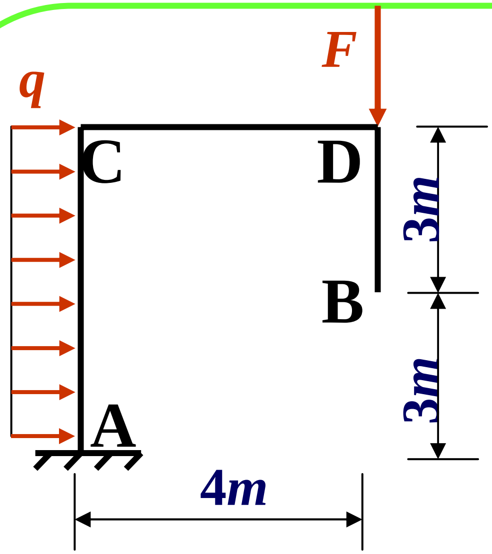
2）在B处虚设水平单位力，并作 $\overline{M}$ 图;

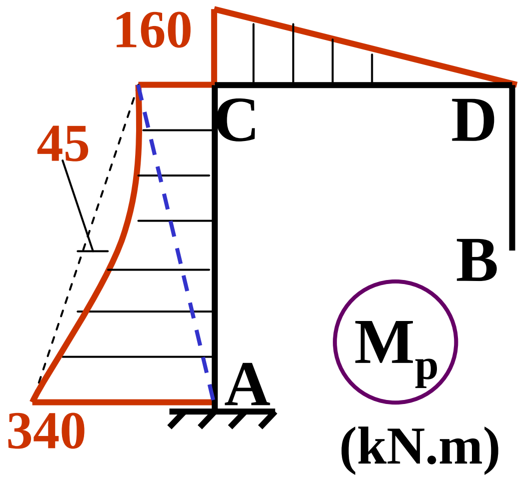


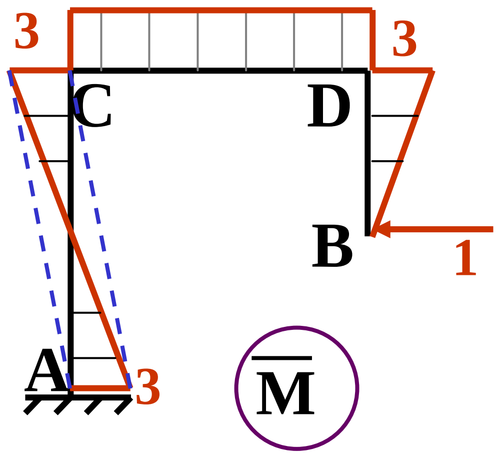
4) 图乘，求B的水平位移,

将AC段的Mp图分为二个三角形和一个二次抛物线。

将AC段的单位弯矩图分为长度为AC的二个三角形。





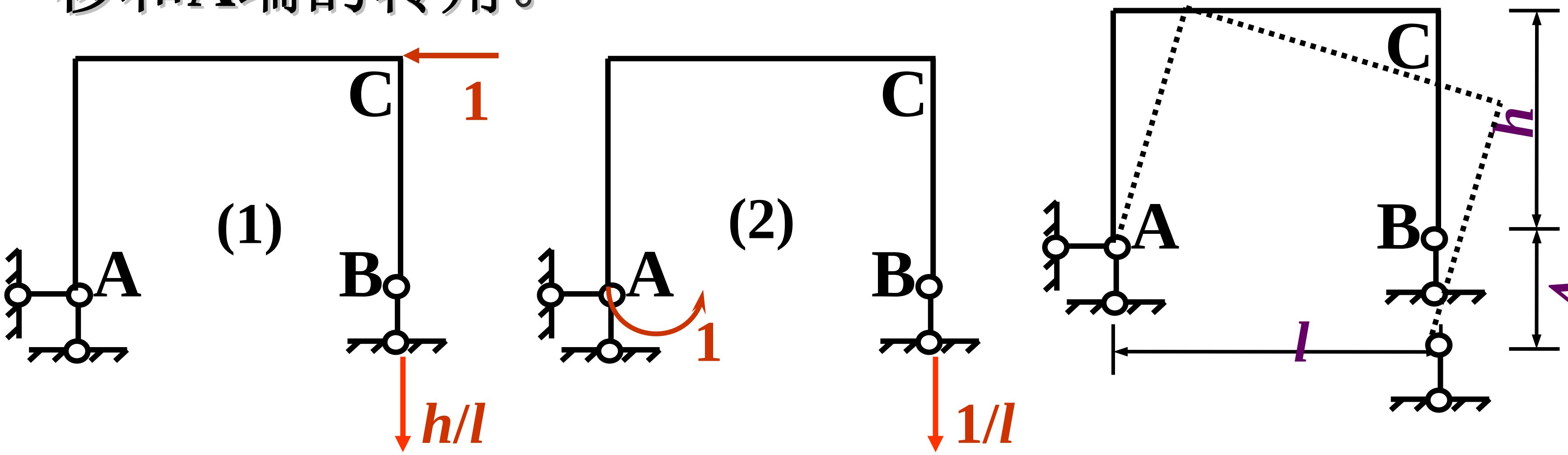


$$\Delta_{BH}=\frac{10^3}{EI}\left[\frac{2}{3}\times 45\times 0+\frac{340\times 6}{2}\times(1-2)+\frac{160\times 6}{2}\times(2-1)+\frac{160\times 4}{2}\times 3\right]=\frac{2046\times 10^3}{EI}$$

$$\Delta_{BH}=\frac{2046\times 10^3}{21\times 10^{10}\times 2.4\times 10^{-4}}\approx 8.33\times 10^{-3}\,m$$

水平向左。

习12-15　图示刚架支座B下沉Δ，求C点的水平位移和A端的转角。



解：1)求C点的水平位移：

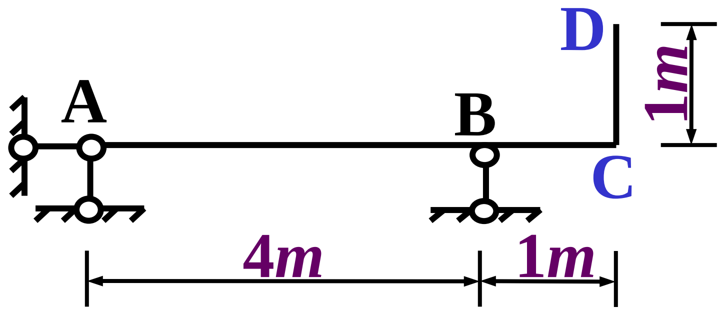
在C点加水平单位力，求支反力，如图 (1)示

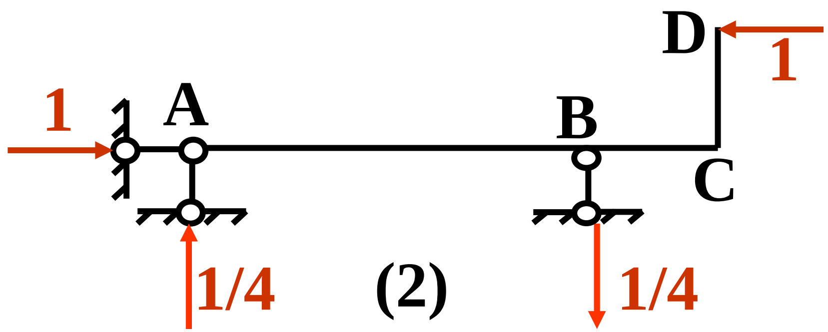
$$\Delta_C^H = -\sum \overline{R}_k \cdot c_k = -h\Delta/l \quad (\rightarrow)$$

2)求A端的转角：在A点加单位力偶，支反力如图(2)。

$$\varphi_A = -\sum \overline{R}_k \cdot c_k = -\Delta/l$$

习12-16　求图示刚架支座移动引起D点的水平位移。
(1)支座A向右移动2cm；　(2)支座A向下移动1cm；
(3)支座B向下移动1.5cm；





解：在D 点加水平单位力，求支反力，如图 (2)所示

1)　支座A向右移动2cm：

$$\Delta_D^H = -\overline{R}_{Ax} \cdot c_{Ax} = -1 \times 2 = -2cm(\rightarrow)$$

2)　支座A向下移动1cm：

$$\Delta_D^H = -c_{Ay} \cdot \overline{R}_{Ay} = 1 \times 1/4 = 0.25cm(\leftarrow)$$

3)　支座B向下移动1.5cm：

$$\Delta_D^H = -c_{By} \cdot \overline{R}_{By} = -1.5 \times 1/4 = -0.375cm(\rightarrow)$$

习13-2　用力法求作图示结构的M、F_Q图。EI=常数

（*a*）解：

1）选择基本体系

2）建立力法典型方程

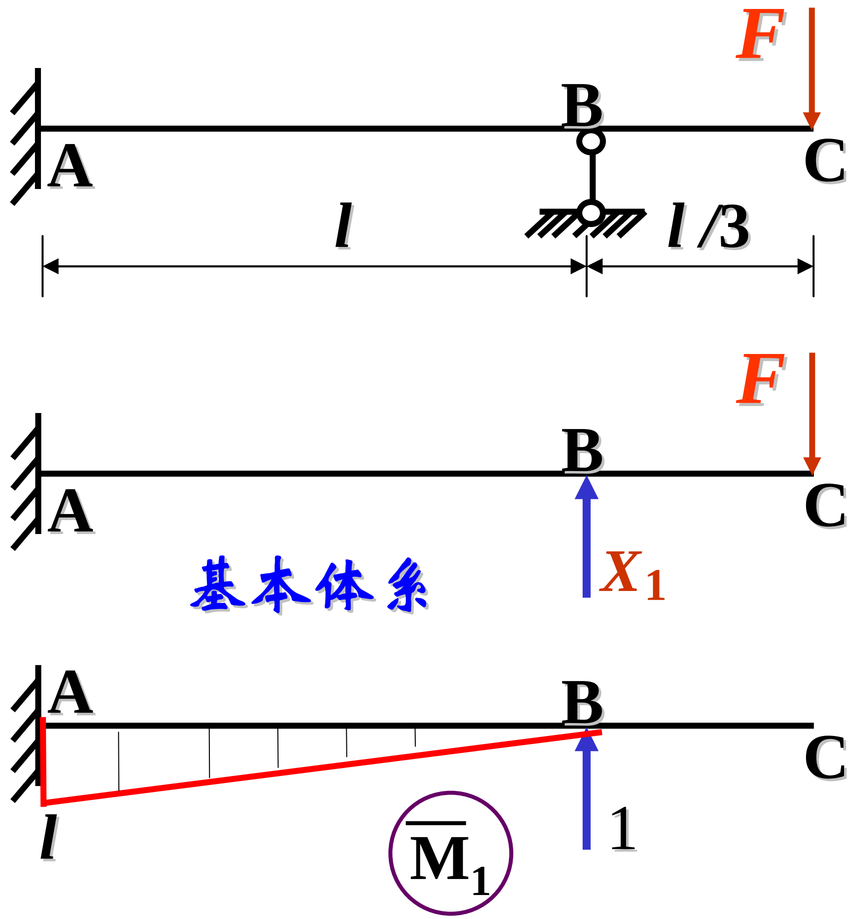
$$\delta_{11}X_1+\Delta_{1P}=0$$

3）求系数项和自由项

作单位弯矩图，

$$\delta_{11}=\sum\int\frac{\overline{M}_1\overline{M}_1}{EI}$$

$$=\frac{l\times l\times l}{3EI}=\frac{l^3}{3EI}$$



$$\delta_{11}X_1+\Delta_{1P}=0$$

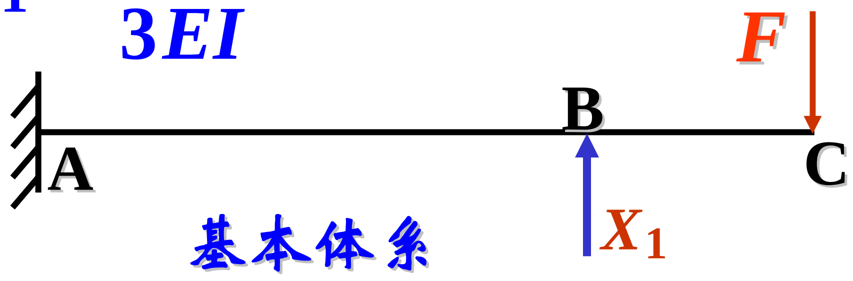
作荷载弯矩图，

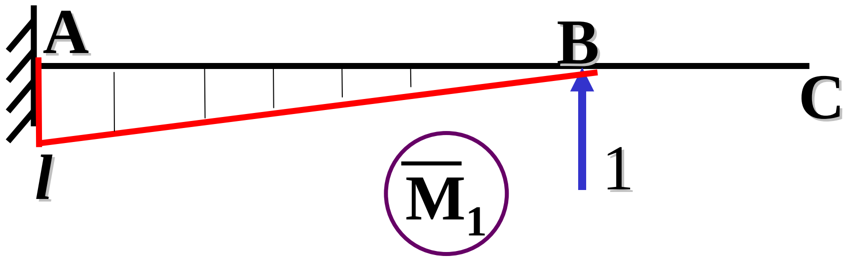
两弯矩图图乘：

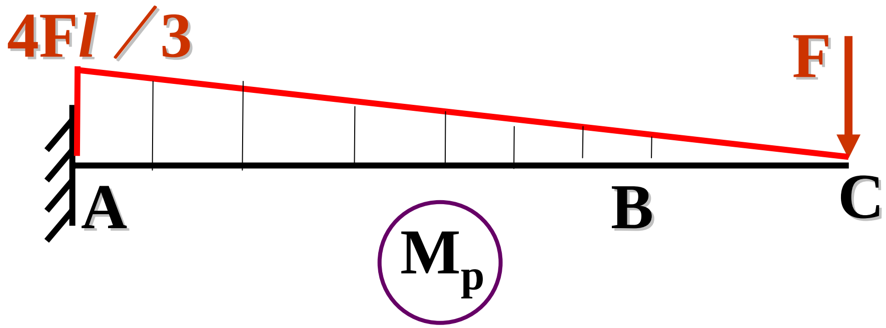
$$\Delta_{1P}=\frac{-l^2}{2EI}\cdot Fl$$

$$=-Fl^3/(2EI)$$

$$\delta_{11}=\frac{l^3}{3EI}$$







4）解方程，

求多余未知力

$$\frac{l^3}{3EI}X_1-\frac{Fl^3}{2EI}=0$$

$$X_1=3F/2$$

$$X_1 = 3F/2$$

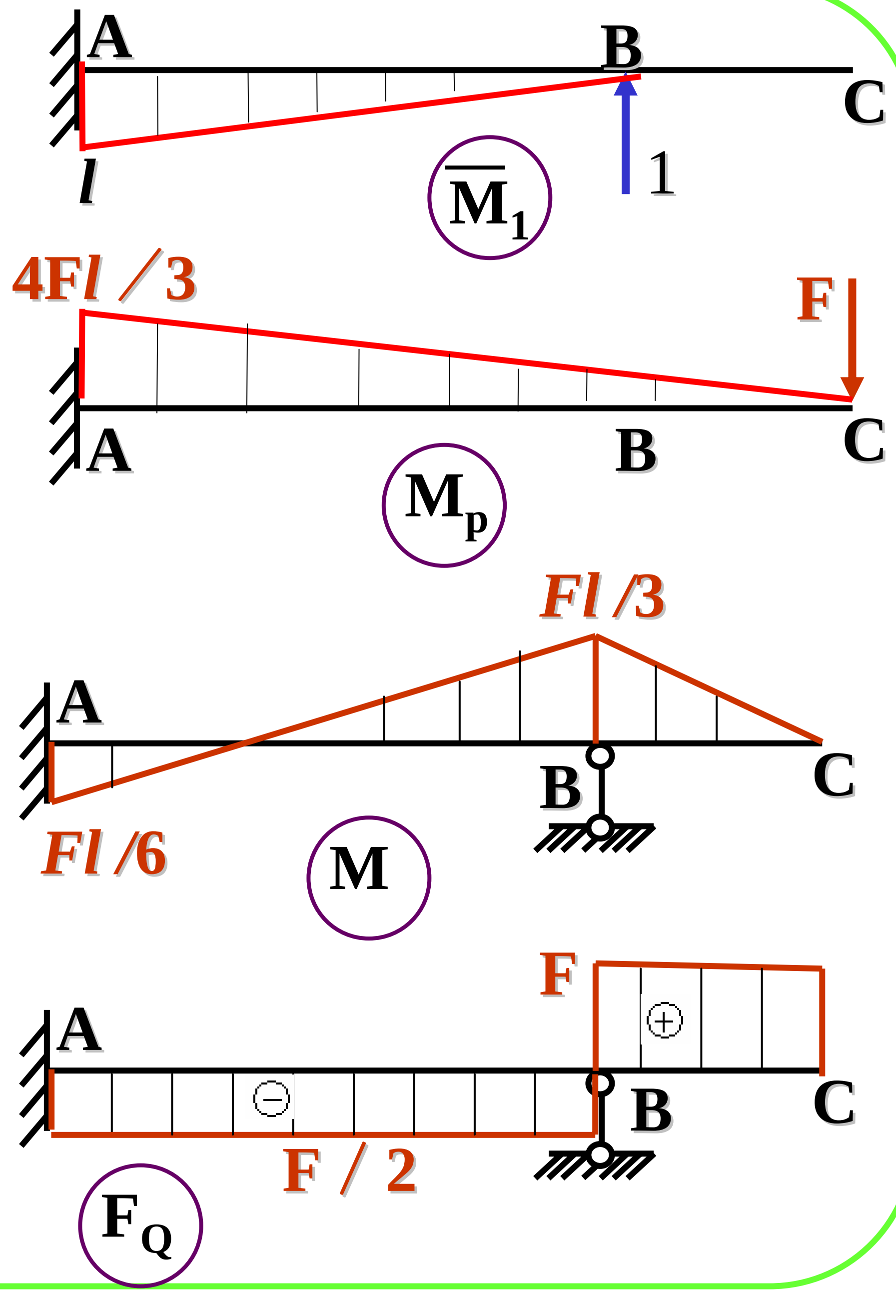
由迭加原理作原结构的弯矩图

$$M_A = l\frac{3F}{2} - \frac{4Fl}{3} = \frac{Fl}{6}$$

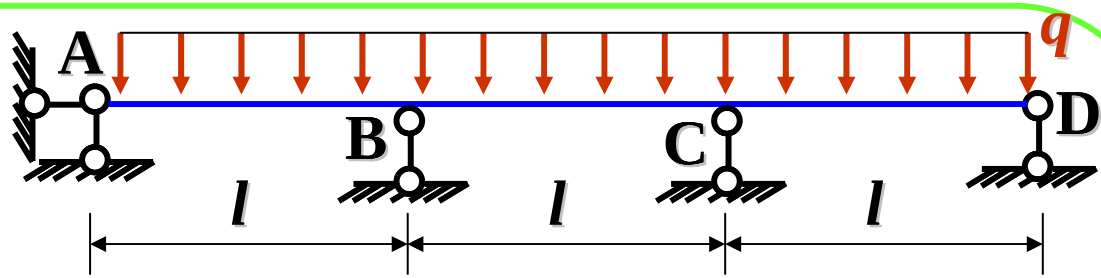
$$M_B = 0 - \frac{Fl}{3} = -\frac{Fl}{3}$$

原结构的弯矩图如图M

原结构的剪力图如图F_Q

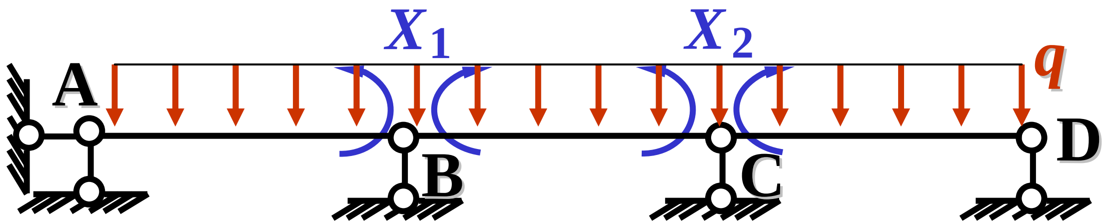


习13-2（d）解：



1）选择基本体系

2）力法典型方程



基本体系

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1+\delta_{12}X_2+\Delta_{1P}=0 \\ \delta_{21}X_1+\delta_{22}X_2+\Delta_{2P}=0 \end{cases}$$

3）求系数和自由项

作单位弯矩图，如下图示

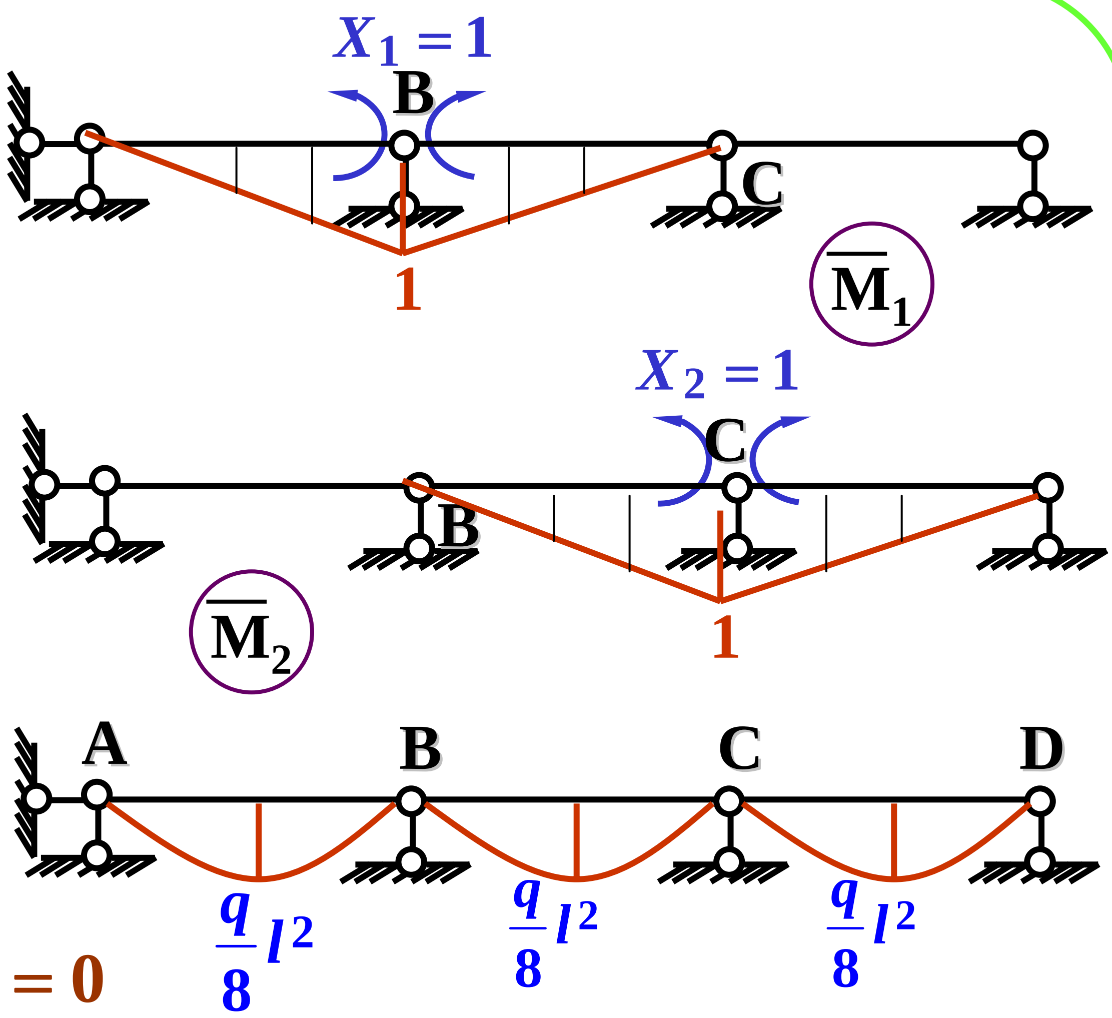
图乘，得系数：

$$\delta_{11}=\delta_{22}=\frac{2l}{3EI} \qquad \delta_{12}=\frac{l}{6EI}$$

作荷载弯矩图，

$$\Delta_{1P}=\frac{2ql^3}{3EI}\cdot\frac{2}{2}$$

$$=\frac{2ql^3}{3EI}=\Delta_{2P}$$



4）解方程，

求多余未知力

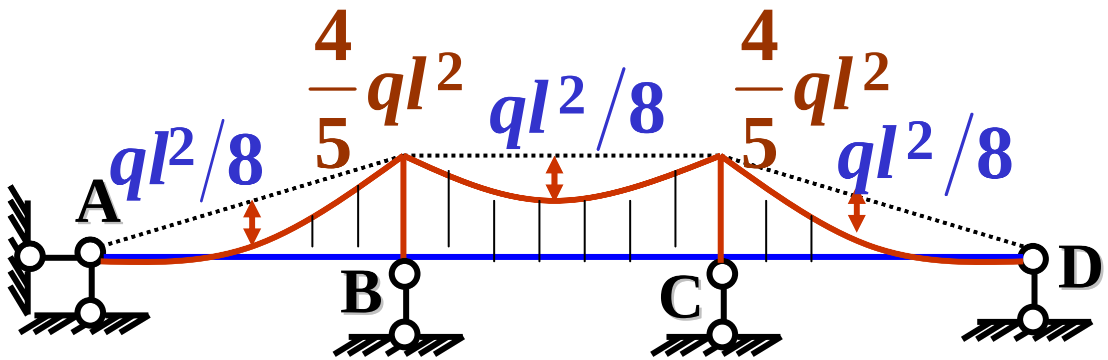
$$\begin{cases}\frac{l}{3}X_1+\frac{l}{6}X_2+\frac{2}{3}ql^3=0\\ \frac{l}{6}X_1+\frac{2l}{3}X_2+\frac{2}{3}ql^3=0\end{cases}$$

续习13-2（d）解

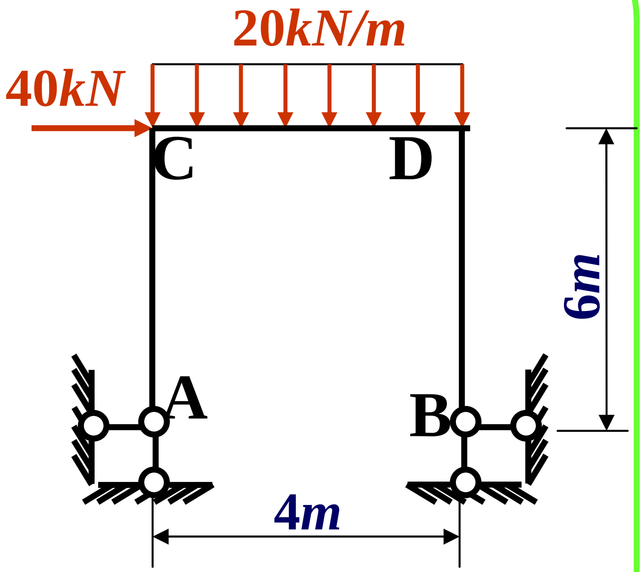
$$\begin{cases} \frac{2}{3}X_1+\frac{1}{6}X_2+\frac{2}{3}ql^3=0 \\ \frac{1}{6}X_1+\frac{2}{3}X_2+\frac{2}{3}ql^3=0 \end{cases}$$

$$X_1=X_2=-\frac{4}{5}ql^2$$

由迭加原理作原结构的弯矩图



习13-3　用力法求作图示结构的M图。EI=常数



13-3（a）解：

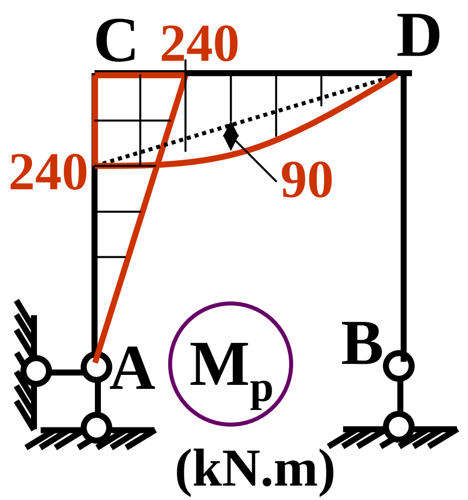
1）选择基本体系

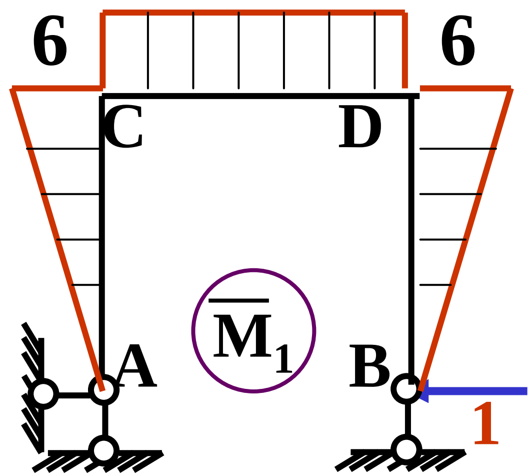
2）建立力法典型方程

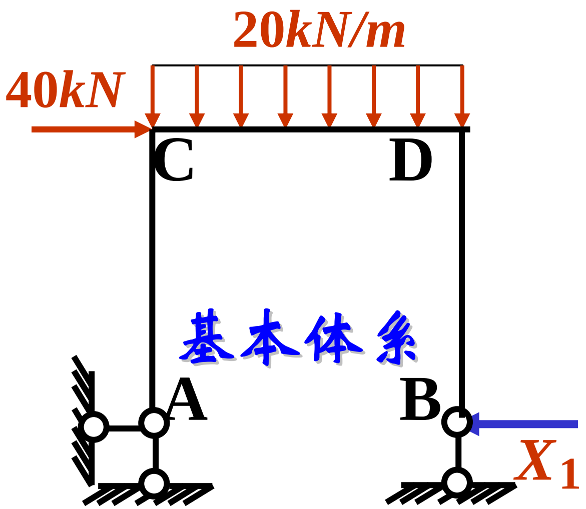
$$\delta_{11}X_1+\Delta_{1P}=0$$

3）求系数项和自由项

作单位、荷载弯矩图，



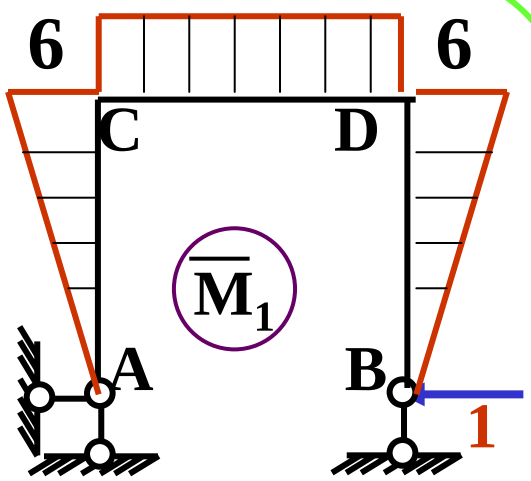


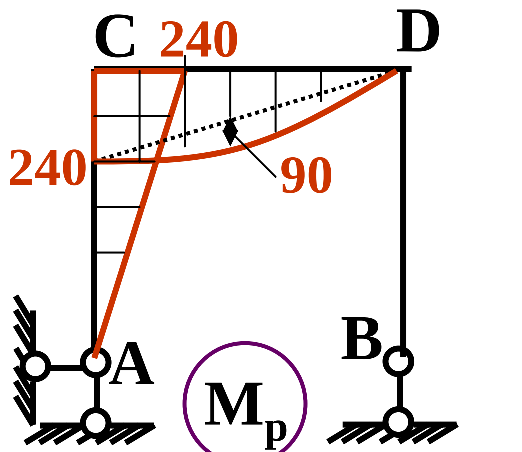


$$\delta_{11}X_1+\Delta_{1P}=0$$

$$EI\delta_{11}=\frac{2\times 6^3}{3}+6^3=360$$

$$EI\Delta_{1p}=-\frac{240\times 6^2}{3}-\left(\frac{6}{2}\times 240+\frac{2}{3}\times 6\times 90\right)6=-9360$$





(kN.m)

4）解方程，求多余未知力

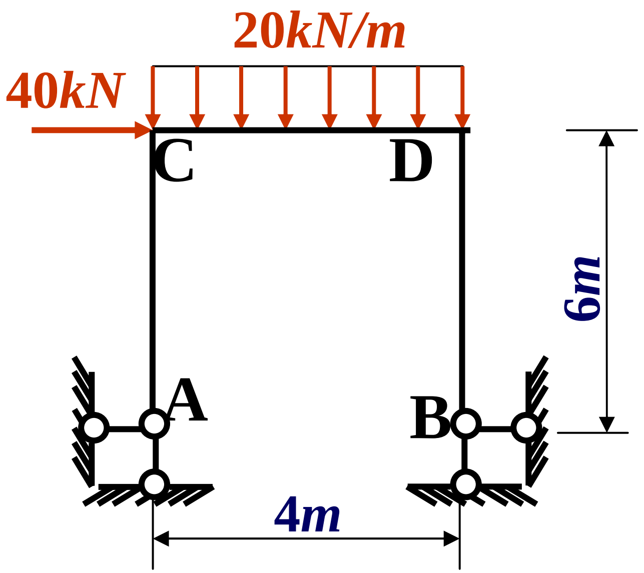
$$X_1=26kN$$

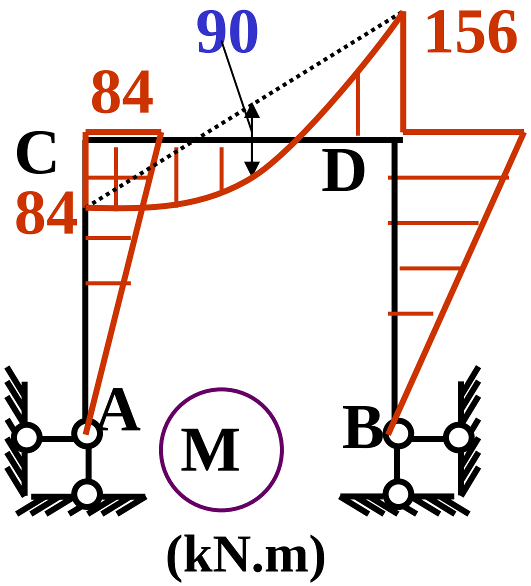
求其余支反力

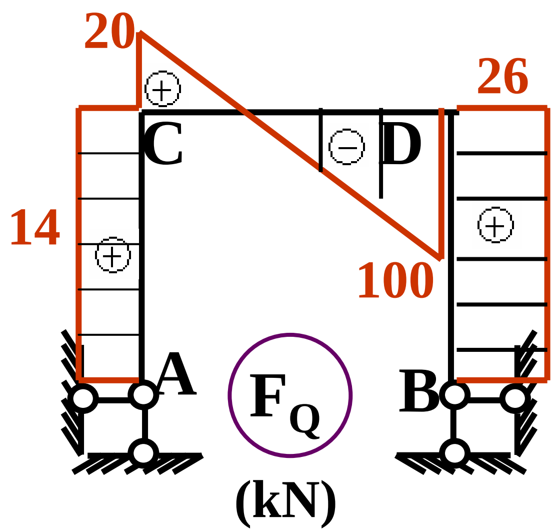
$$X_A=14(\leftarrow),Y_A=20(\uparrow),Y_B=100(\uparrow)kN$$

续习13-3（*a*）解

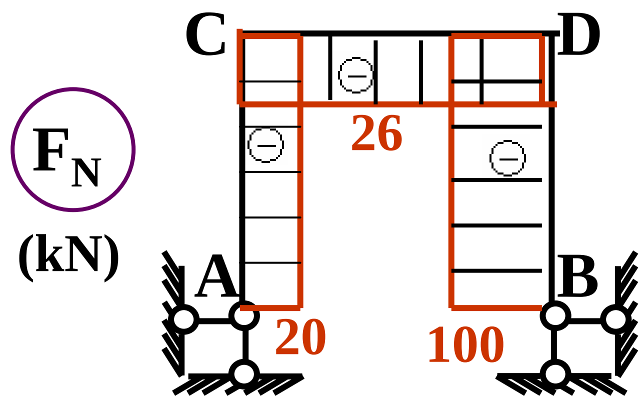
$X_1 = 26kN$　　由迭加原理作原结构的弯矩图







作原结构的剪力图和轴力图



习13-3（b）解：

1）选择基本体系

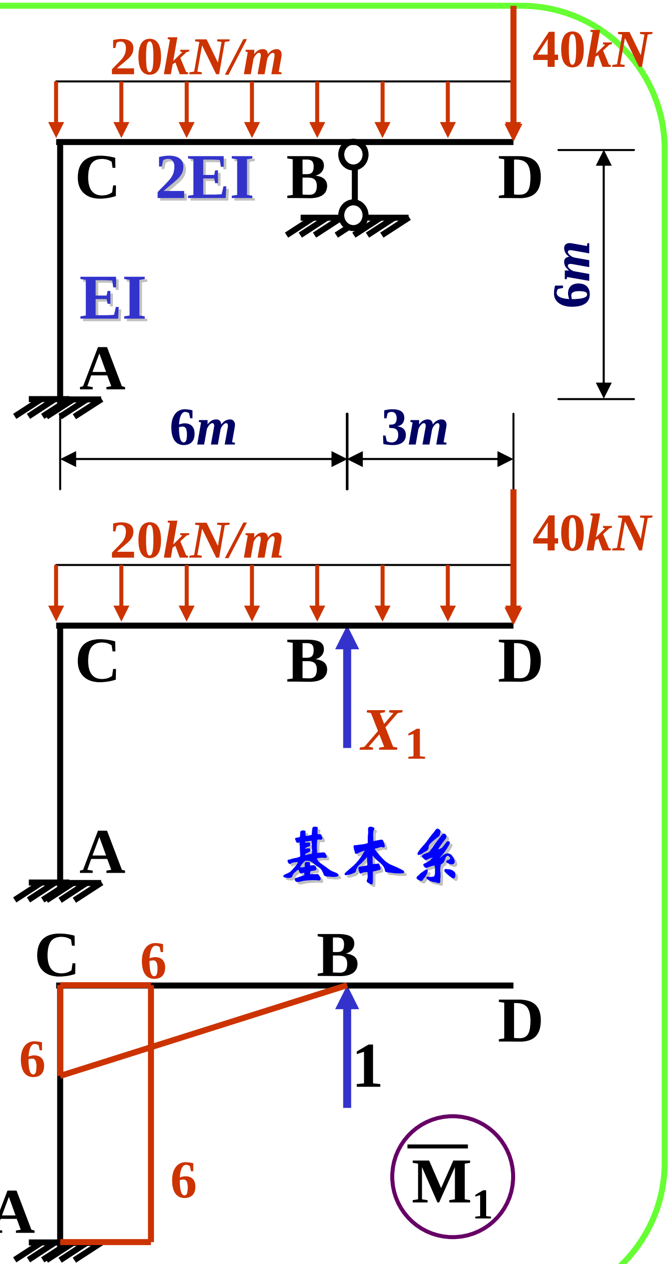
2）建立力法典型方程

$$\delta_{11}X_1+\Delta_{1P}=0$$

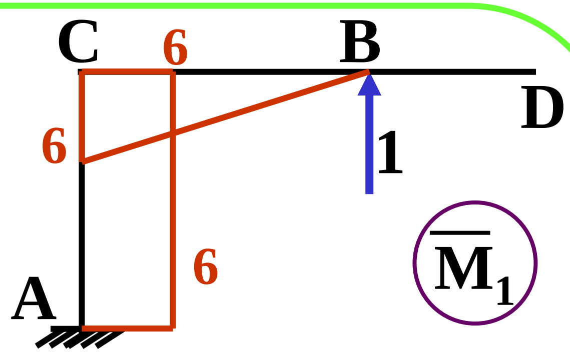
3）求系数项和自由项

作单位、荷载弯矩图，

$$\delta_{11}=\frac{6^3}{EI}+\frac{6^3}{6EI}=\frac{252}{EI}$$



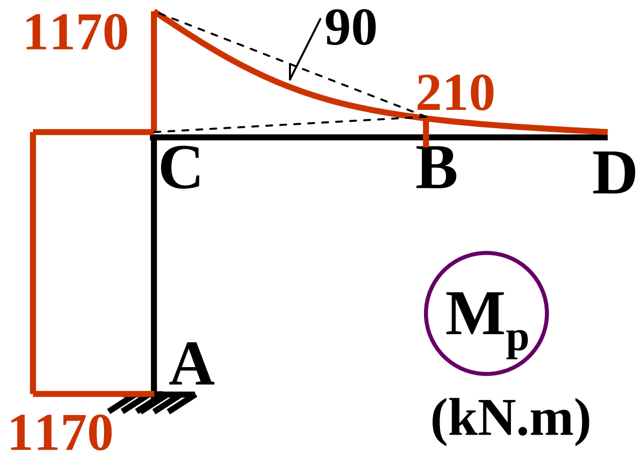
续习13-3（b）解



$$\delta_{11}=\frac{6^3}{EI}+\frac{6^3}{6EI}=\frac{252}{EI}$$

$$\Delta_{1p}=-\frac{1170\times6^2}{EI}-\frac{1}{2EI}\left[\frac{1170}{3}\times6^2+\frac{210}{6}\times6^2-\frac{2\times90}{3}\times6\times3\right]$$

$$=-49230/EI$$



4）解方程，求多余未知力

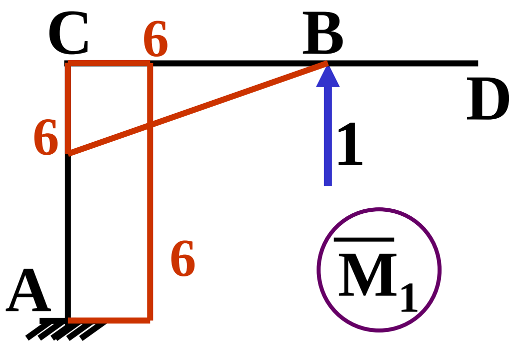
$$X_1\approx195.36\,kN$$

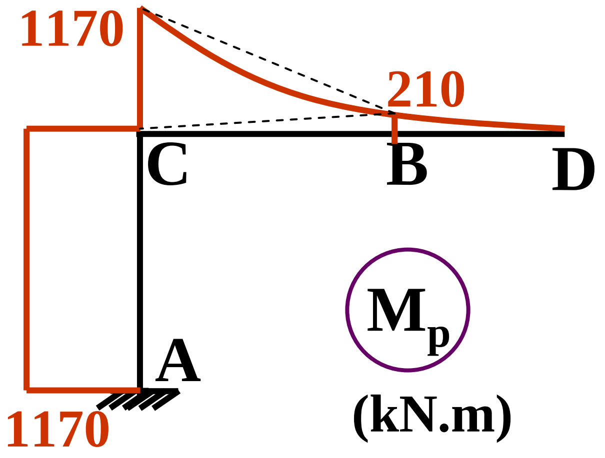
由迭加原理作原结构的弯矩图，如下图示。

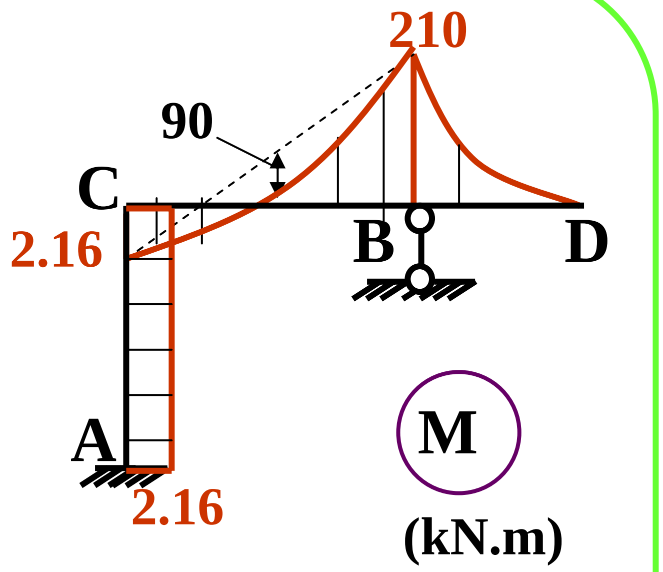
$$M_{CA}=M_{AC}=M_{CB}=2.16\,kN\cdot m$$（内侧拉）

续习13-3（b）解

$$X_1 \approx 195.36\,kN$$



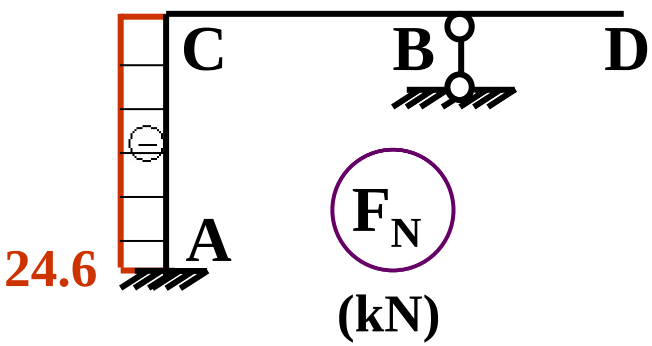


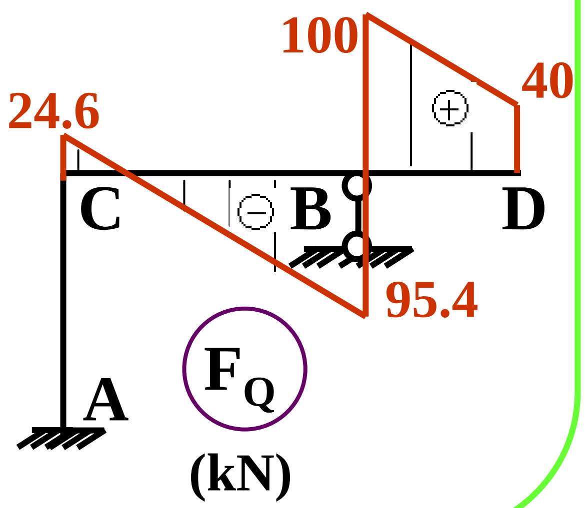


$$M_{CA} = M_{AC} = M_{CB} = 2.16\,kN \cdot m$$

原结构的弯矩图如图示。

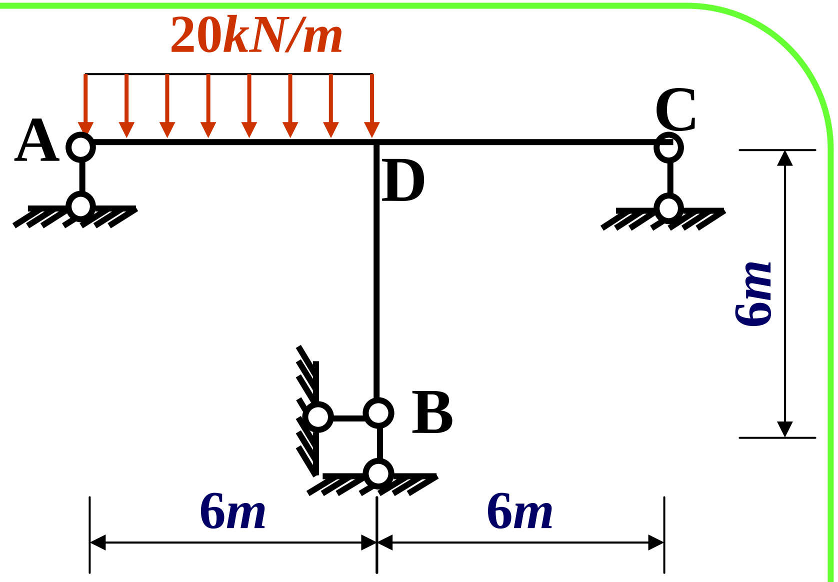
作结构的剪力图和轴力图。





习13-3（*c*）EI=常数

解：



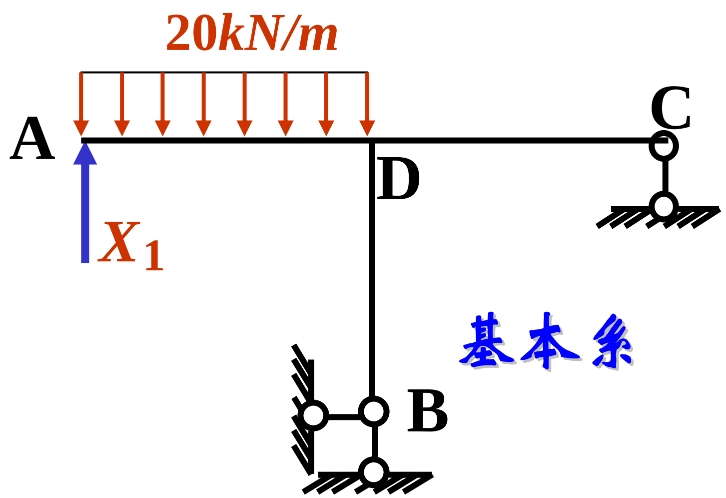
1）选择基本体系

2）建立力法典型方程

$$\delta_{11}X_1+\Delta_{1P}=0$$

3）求系数项和自由项

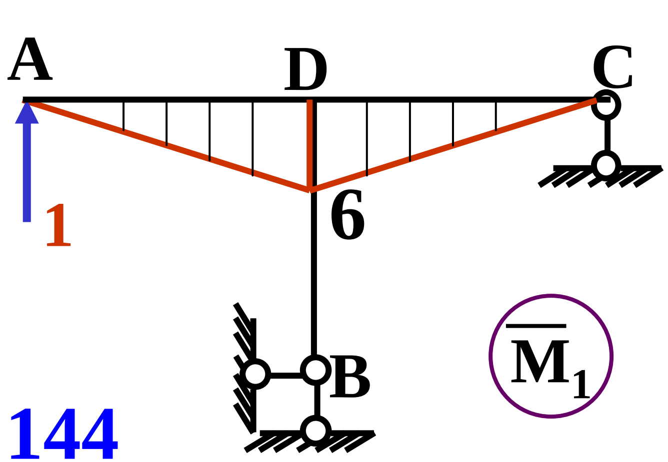
作单位、荷载弯矩图，

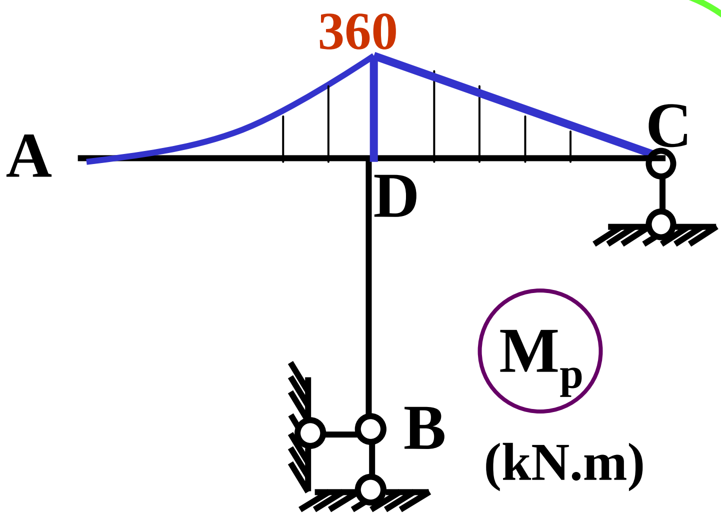


$$EI\delta_{11}=2\times6^3/3=144$$

$$EI\Delta_{1p}=-\frac{360\times6}{3}\cdot\frac{6\times3}{4}-\frac{360\times6^2}{3}=-720$$

续习13-3（c）解





$$EI\delta_{11} = 144$$

$$EI\Delta_{1p} = -720$$

4）解方程，求多余未知力

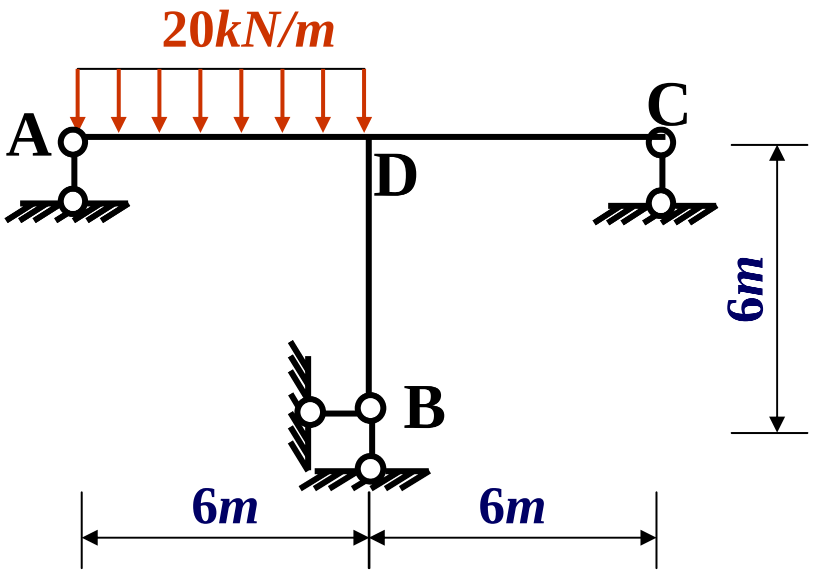
$$X_1 = 52.5kN$$

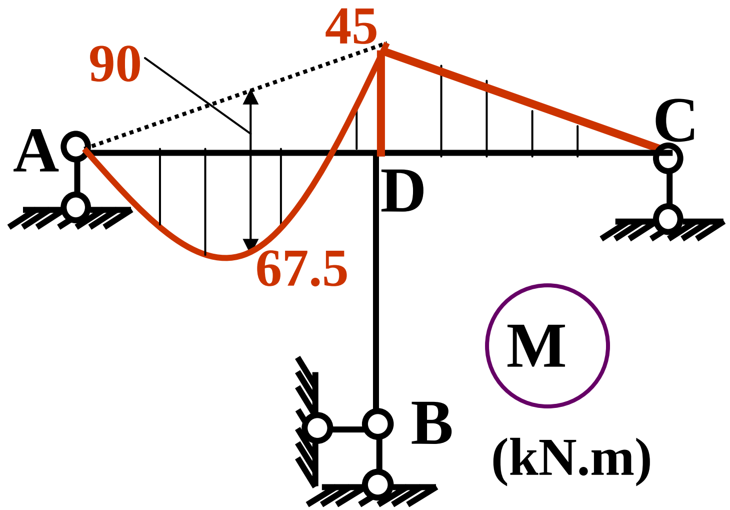
由迭加原理作原结构的弯矩图，如下图示。

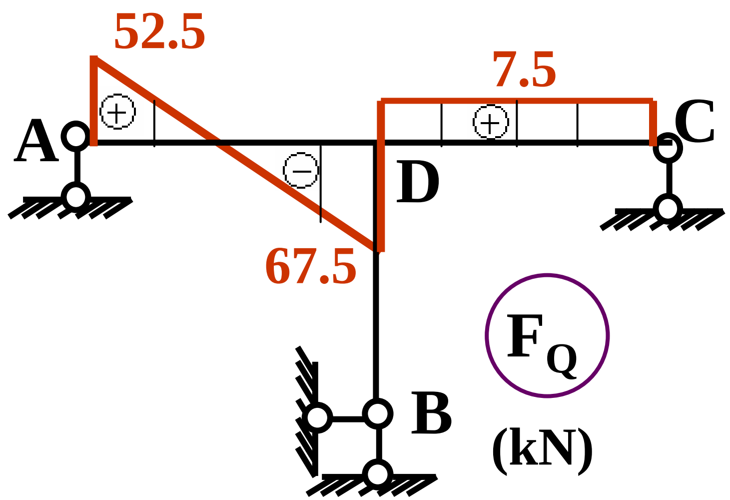
由弯矩图作剪力图，如下图示。

续习13-3（c）解

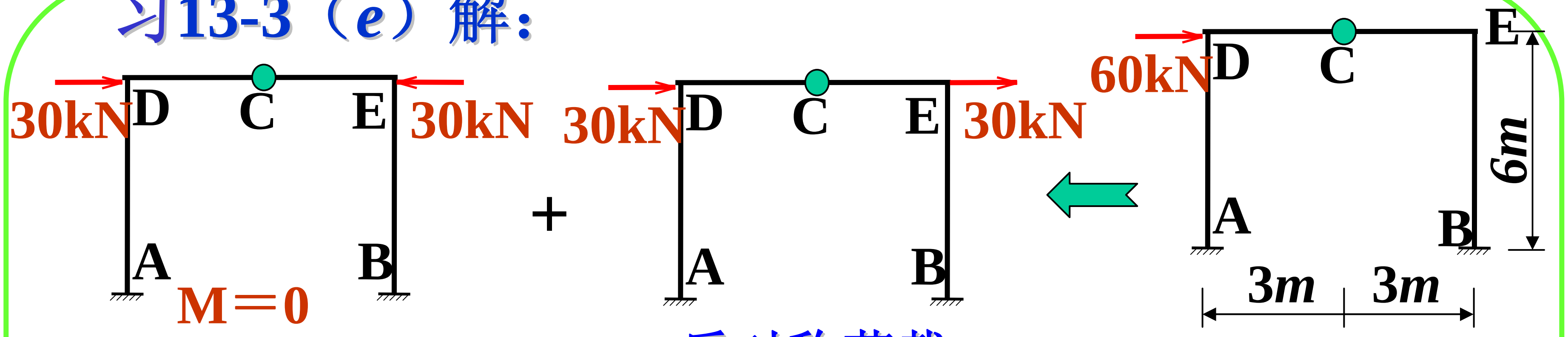
$$X_1 = 52.5kN$$



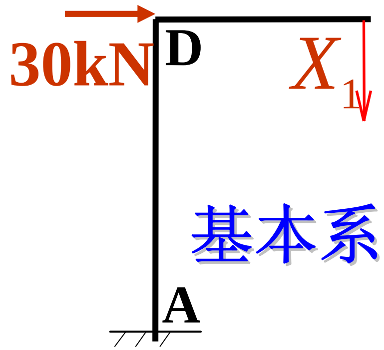




习13-3（*e*）解：



对称荷载　　反对称荷载



解：

荷载分解为对称与反对称之和；

对称荷载作用时M＝0，

只需计算反对称作用的M。

1）选基本体系　**取基本系如图示：**

2）建立方程　$\delta_{11}X_1+\Delta_{1P}=0$

3）求解系数项和自由项

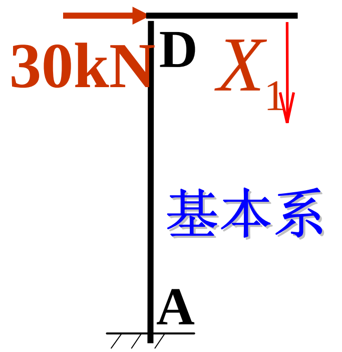
作单位弯矩图和荷载弯矩图，图乘得：

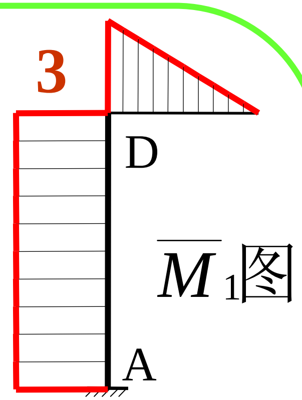
续习13-3（e）解

$$\delta_{11}X_1+\Delta_{1P}=0$$

$$EI\delta_{11}=3^2+6\times3^2=63$$

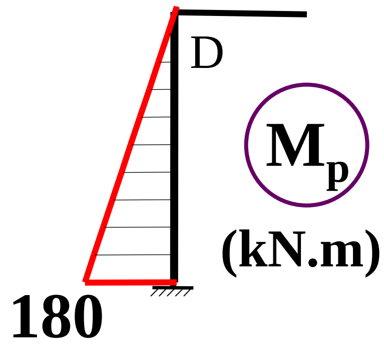
$$EI\Delta_{1p}=90\times6\times3=1620$$





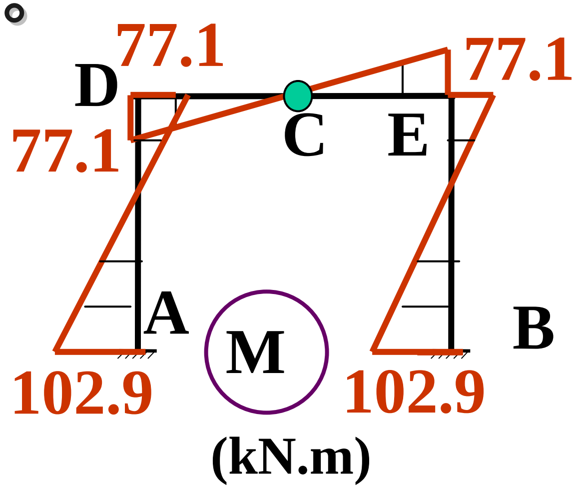
4）解方程，求多余未知力

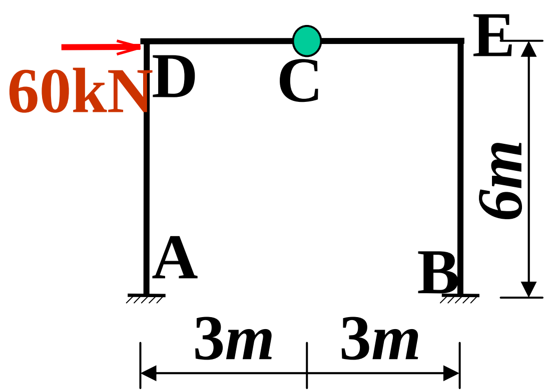
$$X_1=-\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}}=-\frac{1620}{63}\approx-25.7kN$$



5）根据叠加原理 $M=\overline{M}_1X_1+M_P$

绘 M 图如图示。





$X_1 = -25.7kN$

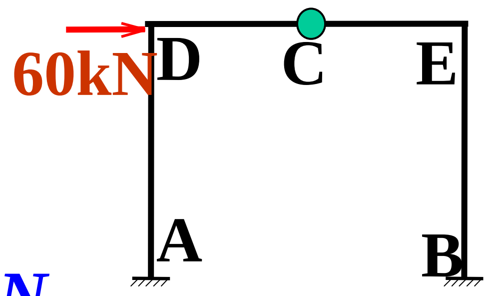
由杆件平衡，

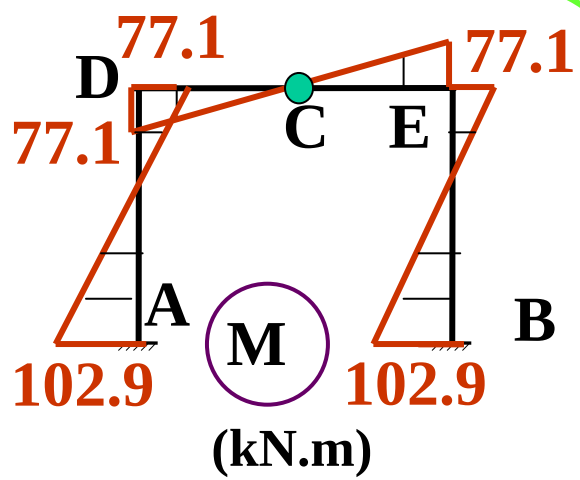
求得剪力

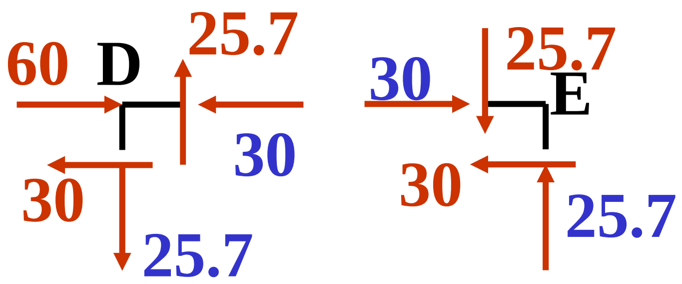
$F_{QAD} = F_{QBE} = 30kN$

$F_{QDC} = F_{QCE} = -25.7$

由结点平衡，求得轴力





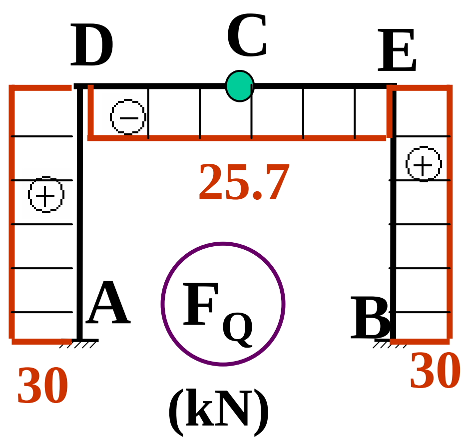


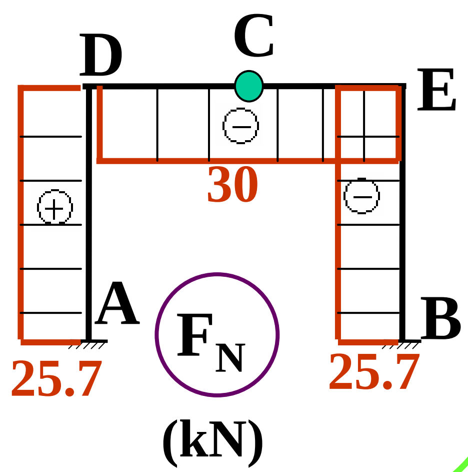
$F_{NAD} = 25.7 = -F_{NBE}$，

$F_{NDC} = -30kN = F_{NDC}$

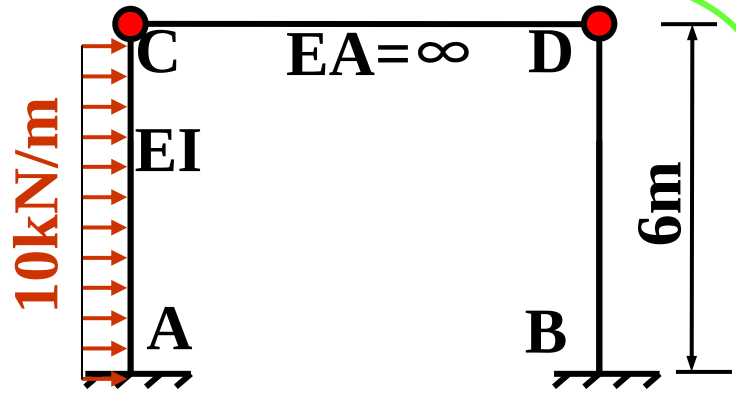
绘 F_Q 图和

F_N 图如图示。





习题13-4(*a*): 排架

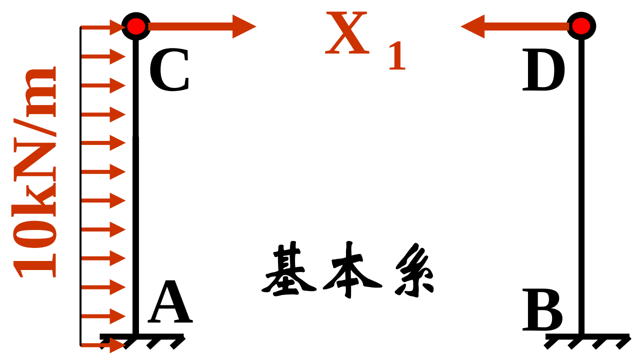


解:1) 取基本系，

2) 力法方程:

$$\delta_{11}X_1+\Delta_{1P}=0$$

3) 作单位、荷载弯矩图如下图示:



系数: $\delta_{11}=\dfrac{2}{3EI}\times 6^3=\dfrac{4\times 36}{EI}$

自由项:

$$\Delta_{1P}=\frac{6\times 180}{3EI}\times\frac{6}{4}\times 3=\frac{9\times 180}{EI}$$

4) 解方程，得: $X_1=-\dfrac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}}=-\dfrac{45}{4}kN$

续习13-4（*a*）解

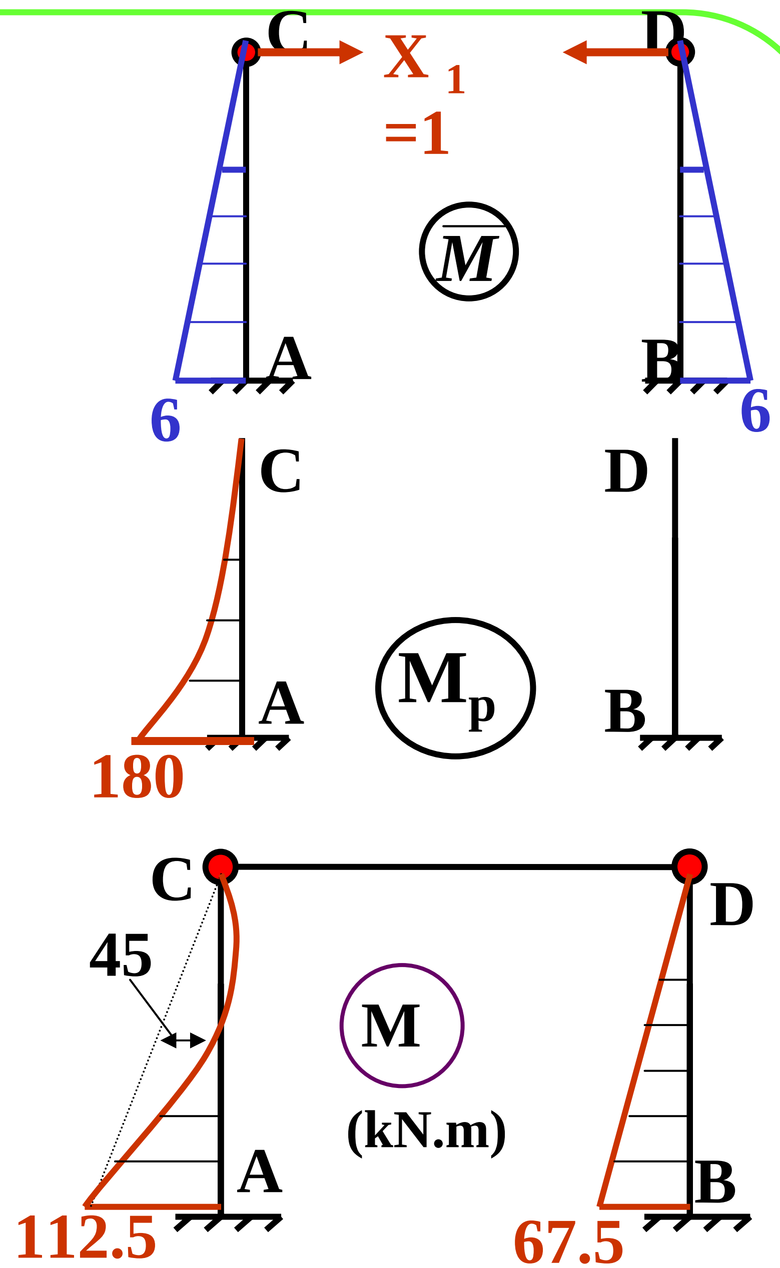
$$X_1 = -\frac{45}{4} kN$$

5) 用迭加法作原结构M图

M_A ＝112.5 (左拉)

M_B ＝67.5 (左拉)

原结构M图如图示。

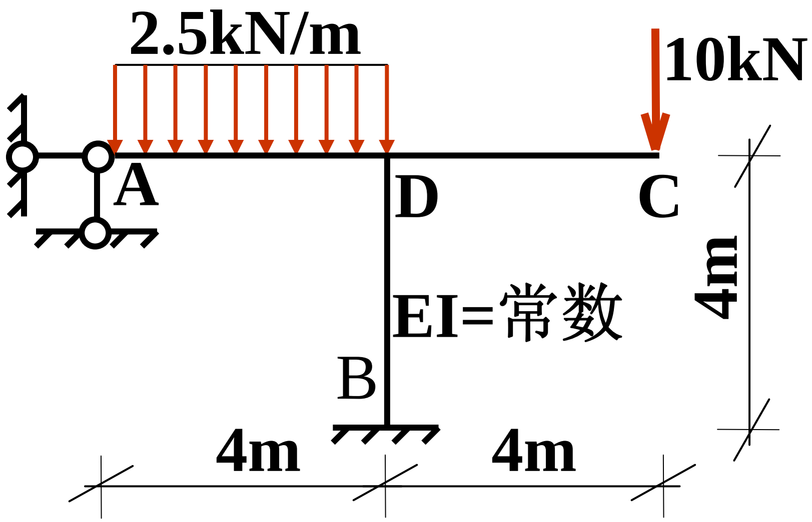


习13-5 用位移法求作图示刚架的M图。

习13-5(*a*):解：系统在D处有一个角位移，

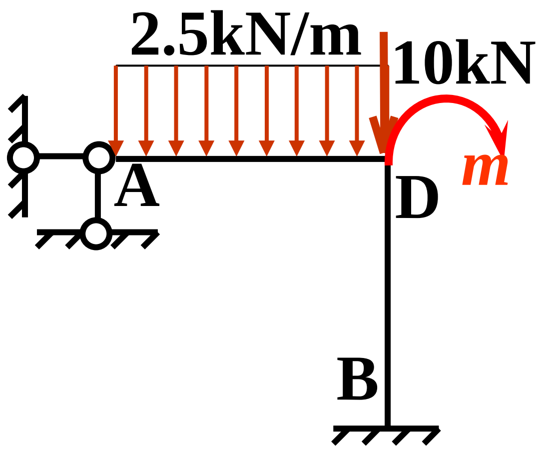
1） 故基本求知量为 φ，

对CD段作静定处理



m=40kN.m, 令i=EI/4

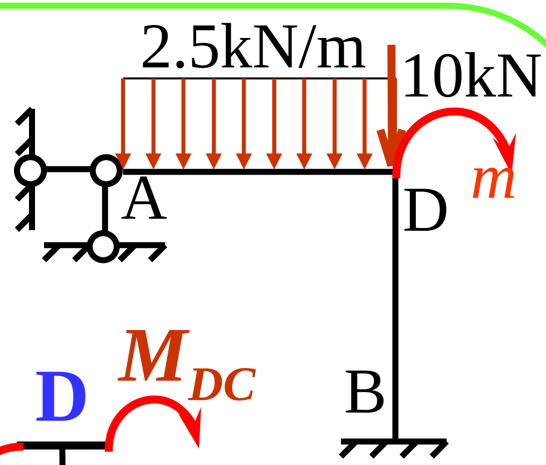
2） 转角位移方程



$$M_{DA} = 3\varphi i + ql^2/8,$$
$$M_{DB} = 4\varphi i,$$
$$M_{BD} = 2\varphi i,$$
$$M_{DC} = 40\,kN.m\ ,$$

3）建立平衡方程

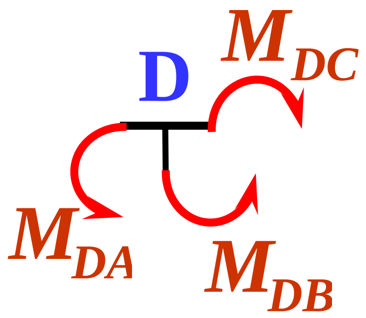
取刚结点D为分离体，如图示：



$$\sum M_D=0:\quad M_{DA}+M_{DB}+M_{DC}=0$$

$$7\varphi i+ql^2/8=40$$

$$7\varphi i=35$$



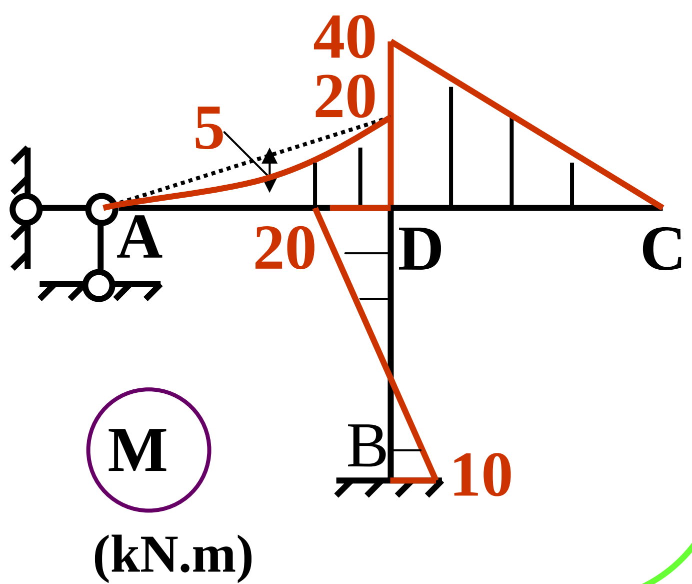
4）解方程，得： $i\varphi=5$

5）求杆端弯矩，作M图：

$$M_{DA}=15+5=20,$$

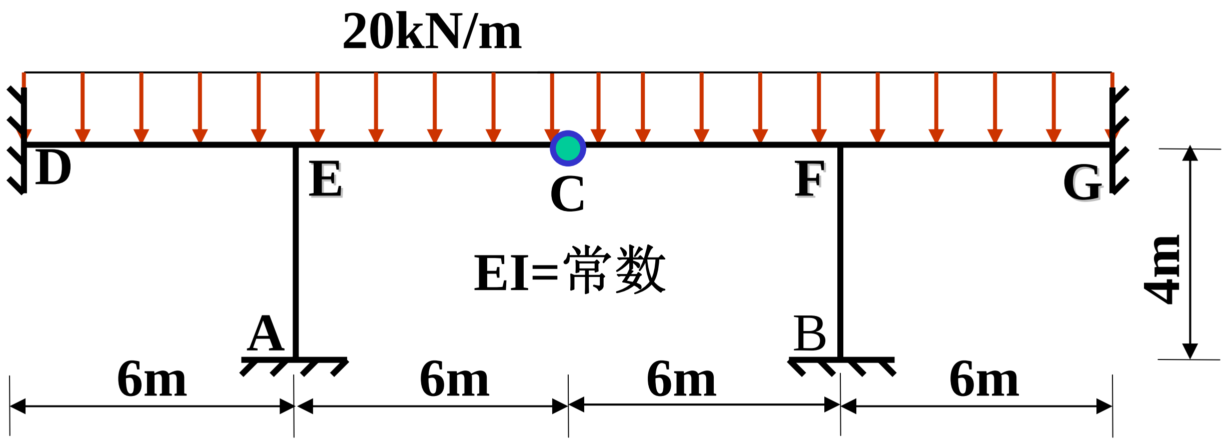
$$M_{DB}=20,\ M_{BD}=10,$$

$$M_{DC}=40\,kN.m\ ,$$



习13-6　利用对称性求作图示刚架的M图。

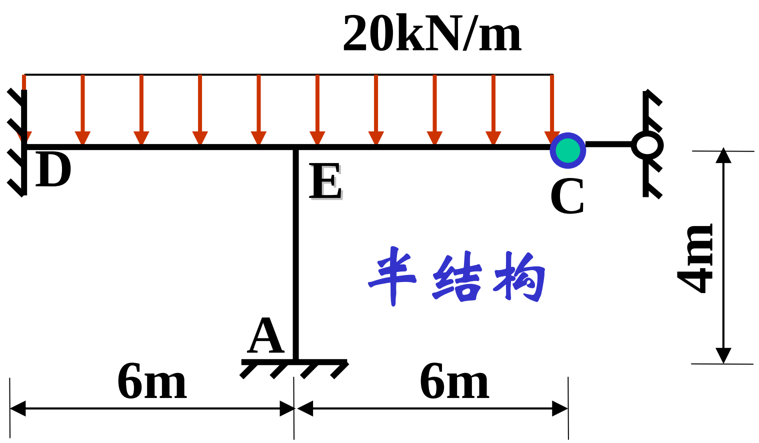
习13-6(b):解:

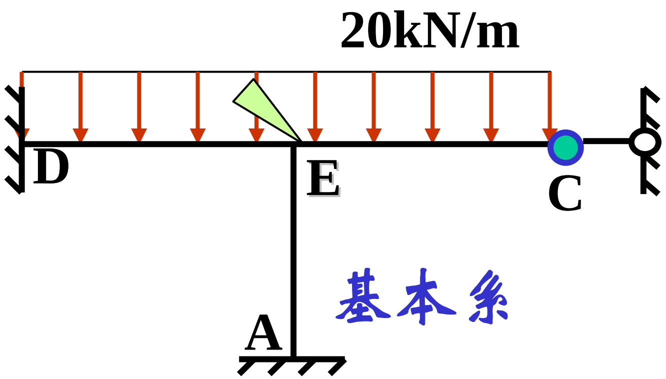


取半结构如图；

在E处有一个角位移，C处侧移不作为基本未知量，

取基本系如图





续习13-6（b）解

取基本系如图示，令EI=1，

位移法典型方程：

$$k_{11}\Delta_1 + F_{1p} = 0$$

$$i_{DE} = 1/6\,, i_{AE} = 1/4$$

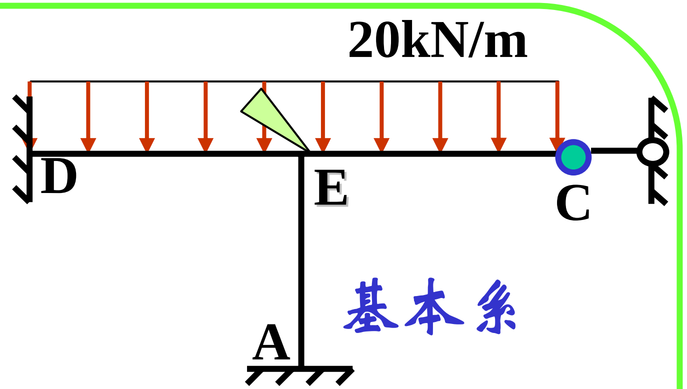
求系数和自由项：

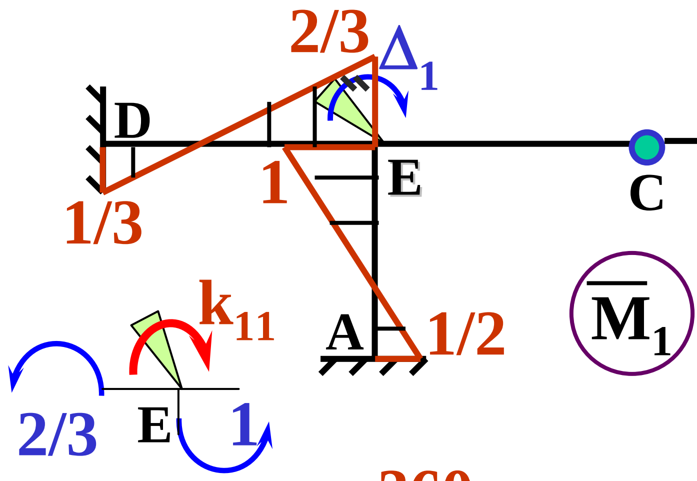
作单位弯矩图，分析结点E，

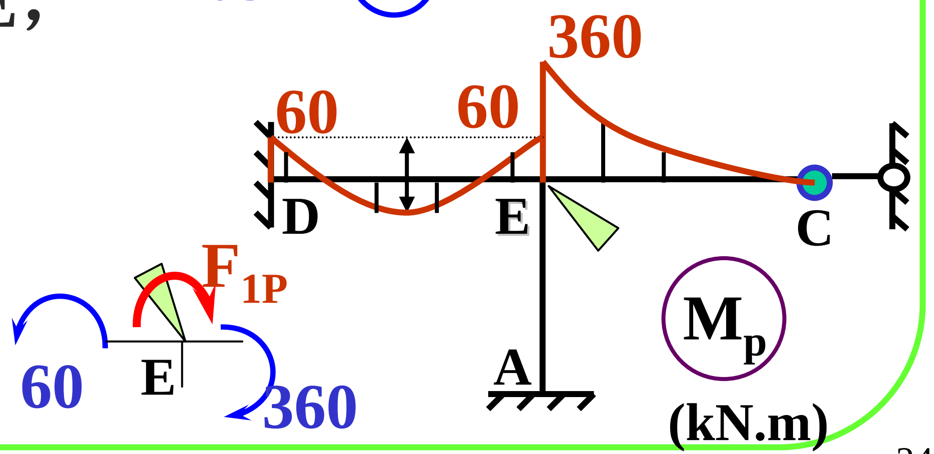
$$\sum M_E = 0: k_{11} = 5/3$$

作荷载弯矩图，分析结点E，

$$\sum M_E = 0: F_{1P} = -300$$







续习13-6（b）解

$$k_{11}\Delta_1 + F_{1p} = 0$$

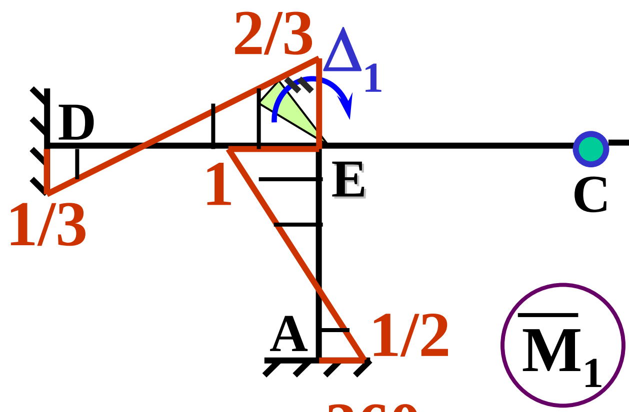
$k_{11} = 5/3$ $F_{1P} = -300$

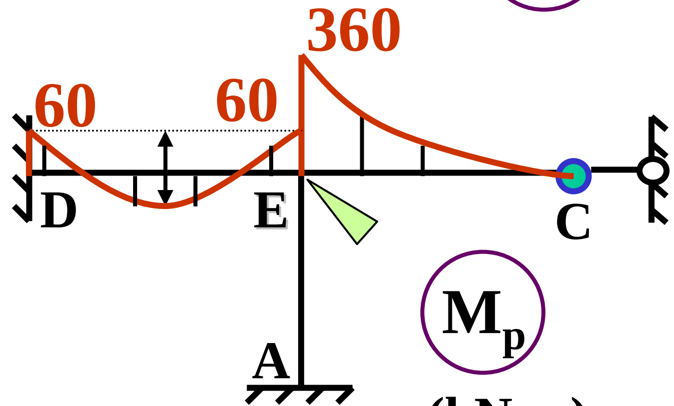
代入位移法典型方程：

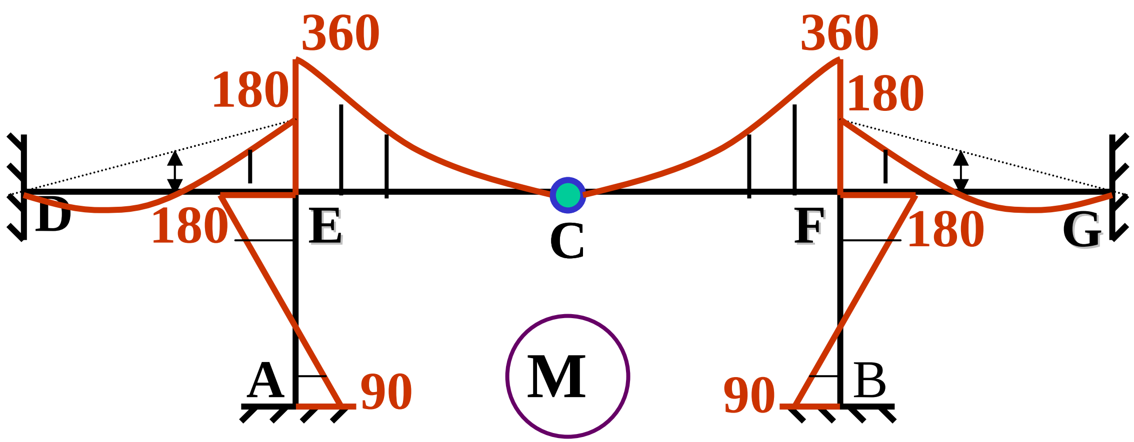
$\Delta_1 = 180$

按迭加原理作弯矩图。

$$M = \overline{M}_1\Delta_1 + M_P$$

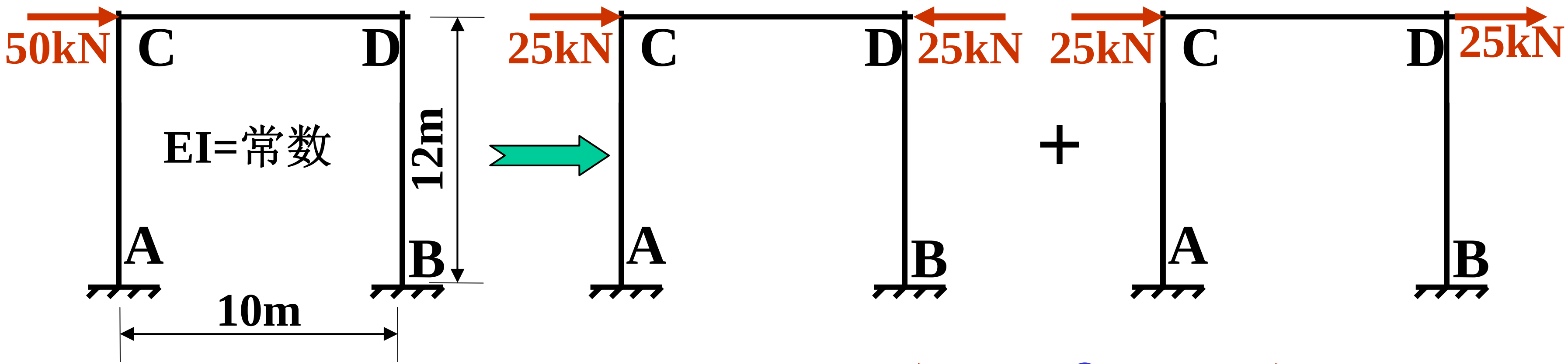






习13-6　利用对称性求作图示刚架的M图。

习13-6(d)　解：　将荷载分解为对称+反对称，在对称荷载作用无弯矩，只考虑反对称荷载作用时的弯矩，取半结构如图；

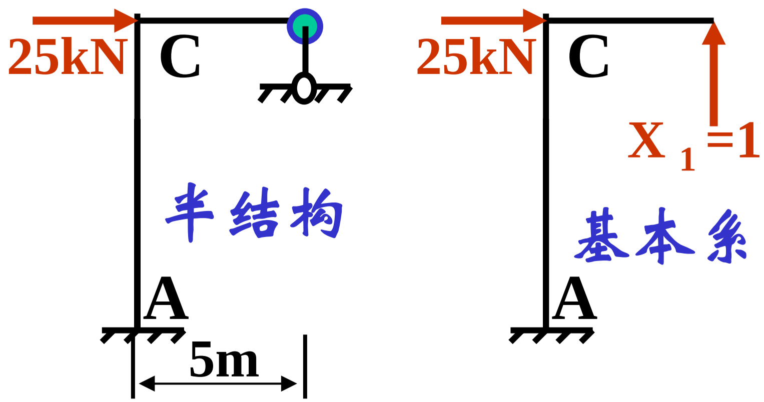


用力法求解：

取基本系如图示。

力法典型方程：

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} = 0$$



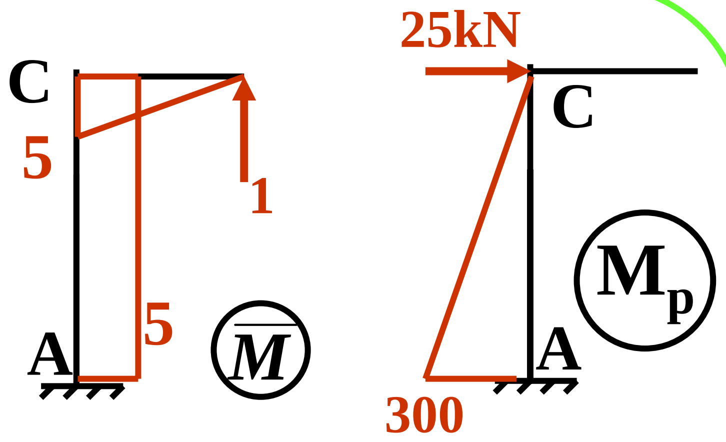
续习13-6（d）解

$$\delta_{11}X_1+\Delta_{1P}=0$$

求系数项和自由项

作单位弯矩图，求得：

$$EI\delta_{11}=\left(\frac{1}{3}+1\right)\times 5^3=\frac{500}{3}$$



作荷载弯矩图，求得：

$$EI\Delta_{1P}=-\frac{1}{2}\times 12\times 300\times 5=-9000$$

解力法典型方程，得：

$$X_1=54kN$$

利用迭加原理和对称性质

作原结构的弯矩图：